Aufgabe 10 Vektoranalysis Kurven in $\mathbb{R}^2$

Betrachten Sie die folgende parametrisierte Kurve:

$$\gamma : \underbrace{[0,\infty)}_{[a,b]} \to \mathbb{R}^2 , \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix} .$$

(a) Skizzieren Sie die Kurve, d. h. das Bild der Abbildung.

(b) Handelt es sich um einen *regulären* Weg?

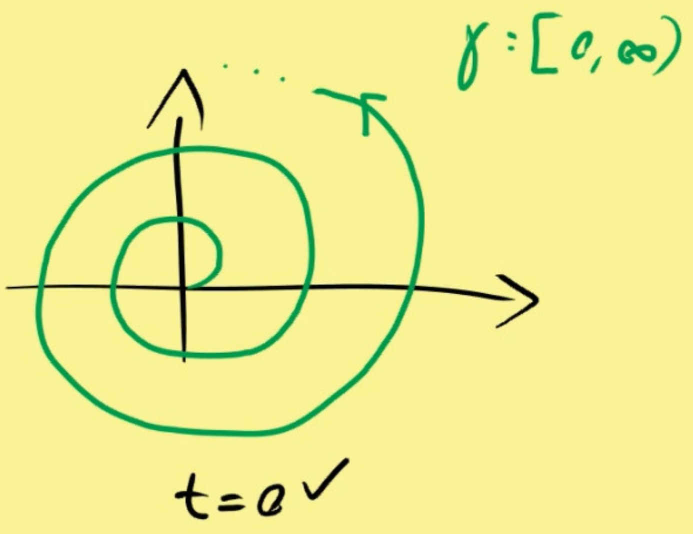
(c) Geben Sie Tangenteneinheitsvektor und Normaleneinheitsvektor für jeden Punkt an.

$\tilde{\gamma} : [0,R] \to \mathbb{R}$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}$

$R \in \mathbb{R}$, $R > 0$, beliebig

(a) $\gamma(t) = \underbrace{t}_{\text{Kreisradius}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}}_{\text{Kreis mit Radius } 1}$

(b) $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + t(-\sin(t)) \\ \sin(t) + t\cos(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in [0,\infty)$



Begründung: $\begin{cases} \cos(t) = t\sin(t) \\ \cos(t) = \frac{1}{t}(-\sin(t)) \end{cases}$ $t \neq 0$

$\Rightarrow \underbrace{\left(t + \frac{1}{t}\right)}_{>0} \underbrace{\sin(t)}_{\neq 0} = 0$ (d.h $t = 0, \pi, 2\pi, \dots$) $\Rightarrow \gamma$ ist reguläre

(c) $T_\gamma(t) = \frac{1}{\underbrace{\|\dot{\gamma}(t)\|}_{1+t^2}} \begin{pmatrix} \cos(t) - t\sin(t) \\ \sin(t) + t\cos(t) \end{pmatrix}$, $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = (\cos(t) - t\sin(t))^2 + (\sin(t) + t\cos(t))^2$

$= 1 + t^2 \cdot 1$, $\cos^2 + \sin^2 = 1$

$N_\gamma(t) = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} -(\sin(t) + t\cos(t)) \\ \cos(t) - t\sin(t) \end{pmatrix}$