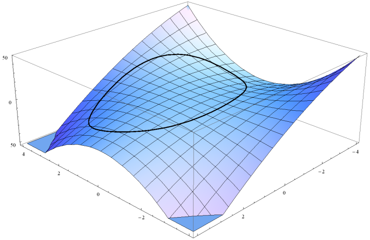
Höhere Mathematik II

Extrema mit Nebenbedingungen

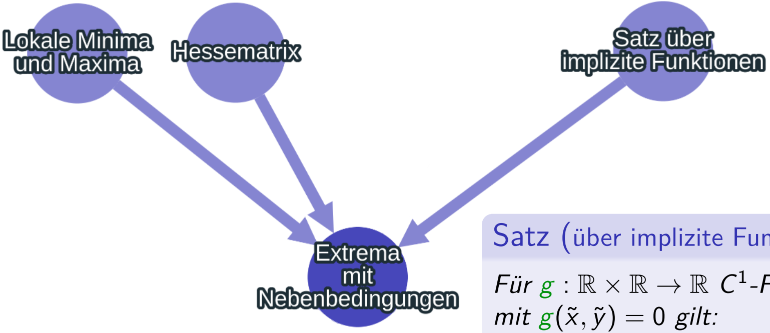
Julian Großmann

Probelehrverstaltung



21. Juni 2022

Heutiges Thema



Satz (Hinreichendes Kriterium)

Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^2*-Funktion gilt:*

$$\mathbf{grad}(f)(\tilde{\mathbf{x}}) = 0 \text{ u. } \mathbf{H}_f(\tilde{\mathbf{x}}) \text{ pos. definit}$$

$$\Longrightarrow$$

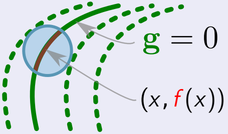
$$f \text{ hat lok. Minimum bei } \tilde{\mathbf{x}}$$

Satz (über implizite Funktionen)

Für $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1*-Funktion mit* $g(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ *gilt:*

$$\frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \text{ invertierbar}$$

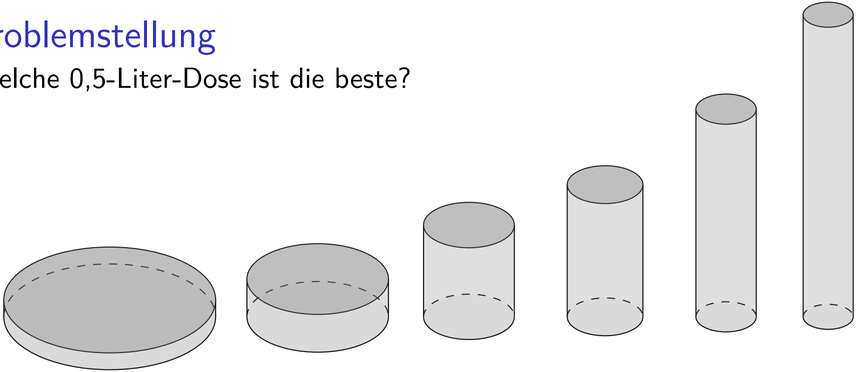
$$\Longrightarrow \quad g(x, f(x)) = 0 \text{ lokal um } \tilde{x}$$



mit f C^1*-Funktion*

Problemstellung

Welche 0,5-Liter-Dose ist die beste?



Welcher Zylinder braucht das wenigste Material?

Suche Minimum unter einer Nebenbedingung:

$$O(r, h) = \text{Fläche}(\;) + \text{Fläche}(\;) + \text{Fläche}(\;) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$V(r, h) = \pi r^2 h = \frac{1}{2}$$

Allgemeines Problem

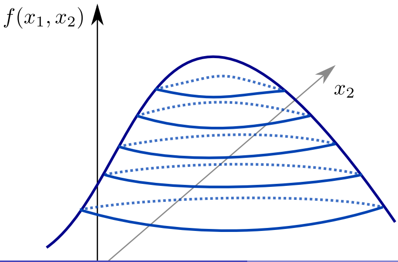
Lokale Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung

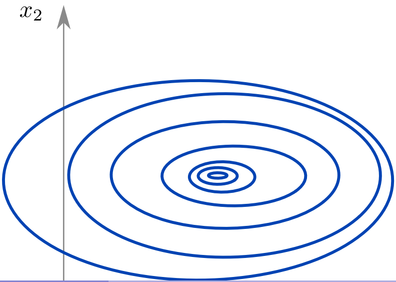
$$g(\mathbf{x}) = 0\,, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\,,$$

mit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Bedeutet: Lokale Extrema der Funktion $f|_G : G \to \mathbb{R}$ mit

$$G := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}\,.$$





Erstes Ergebnis

Theorem (Methode von Lagrange)

Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1*-Funktionen und* $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$ *gilt:*

$$f \text{ hat lokales Extremum unter der Nebenbedingung } g = 0 \text{ bei } \tilde{\mathbf{x}},$$

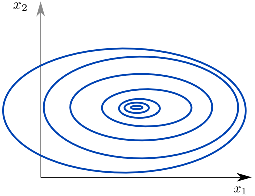
$$+$$

$$\mathbf{grad}(g)(\tilde{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\text{Es gibt } \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } \mathbf{grad}(f)(\tilde{\mathbf{x}}) = \lambda\, \mathbf{grad}(g)(\tilde{\mathbf{x}})\,.$$

Beweisskizze



Ausführliches Video:
`jp-g.de/a345`

Beispiel

Suche lokale Extrema von

$$f(x_1, x_2) = 2\pi(x_1^2 + x_1 x_2) \text{ mit Nebenbedingung } g(x_1, x_2) = \pi x_1^2 x_2 - \frac{1}{2} = 0\,.$$

Allgemeines Ergebnis

Theorem (Methode von Lagrange)

Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$ C^1-Funktionen schreiben wir:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Es gilt:

$$f \text{ hat lokales Extremum unter den Nebenbedingungen } \mathbf{g} = \mathbf{0} \text{ bei } \tilde{\mathbf{x}}$$

$$+$$

$$\operatorname{rang}(J_{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{x}})) = m$$

$$\Longrightarrow$$

$$\text{Es gibt } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R} \text{ mit } \mathbf{grad}(f)(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, \mathbf{grad}(g_j)(\tilde{\mathbf{x}})\,.$$

Umformulierung

Für C^1-Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $j \in \{1, \dots, m\}$ definieren wir die *Lagrange-Funktion:*

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\lambda} := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

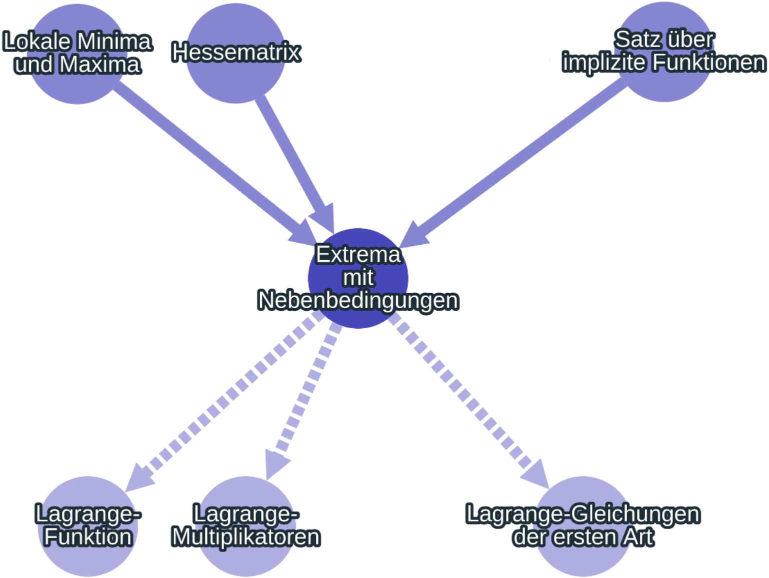
Satz

$$\mathbf{grad}(L)(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad \textit{und} \quad \mathbf{grad}(f)(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, \mathbf{grad}(g_j)(\tilde{\mathbf{x}}) \, .$$

Ausblick


Lokale Minima und Maxima
Hessematrix
Satz über implizite Funktionen
Extrema mit Nebenbedingungen
Lagrange-Funktion
Lagrange-Multiplikatoren
Lagrange-Gleichungen der ersten Art

Aufgabe

Wir suchen die Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3\,,$$

auf dem Schnitt des Zylinders $Z := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 2\}$ mit der Ebene $E := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 1\}$.

(a) Formulieren Sie dies als Nebenbedingungen $\mathbf{g} = 0$.

(b) Skizzieren Sie die Menge $G := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0\}$ in $\mathbb{R}^3$.

(c) Zeigen Sie, dass für alle Punkte $\mathbf{x} \in G$, die Regularitätsbedingung $\operatorname{rang}(J_{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{x}})) = 2$ erfüllt ist.

(d) Stellen Sie die Lagrange-Funktion L für das Extremwertproblem auf.

(e) Bestimmen Sie $\mathbf{grad}(L) : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$.

(f) Bestimmen Sie alle Stellen $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$, die die notwendige Bedingung für Extremwerte erfüllen.

(g) Können Sie entscheiden, ob an diesen Stellen jeweils ein Maximum oder Minimum vorliegt?