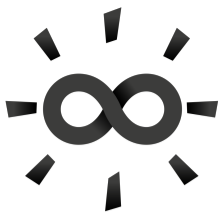**The Bright Side of Mathematics**

The following pages cover the whole Mehrdimensionale Integration course of the Bright Side of Mathematics. Please note that the creator lives from generous supporters and would be very happy about a donation. See more here: https://tbsom.de/support

Have fun learning mathematics!

Aufgabe 1

(a) Skizziere die Menge

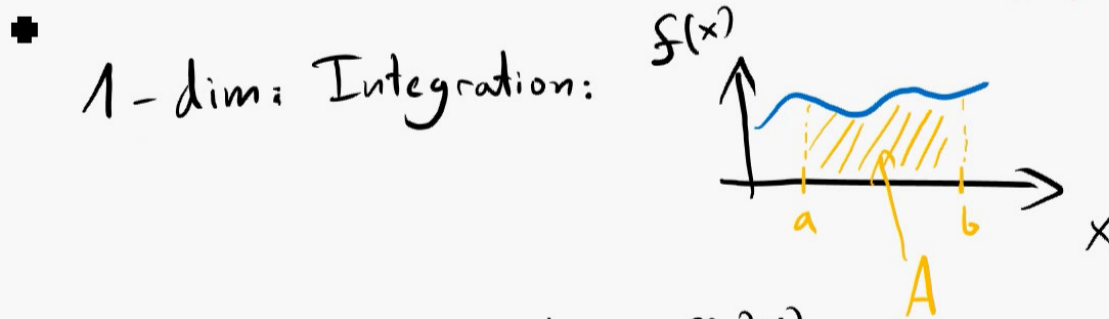$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \leq y, \; y + x^2 \leq 3\}.$$

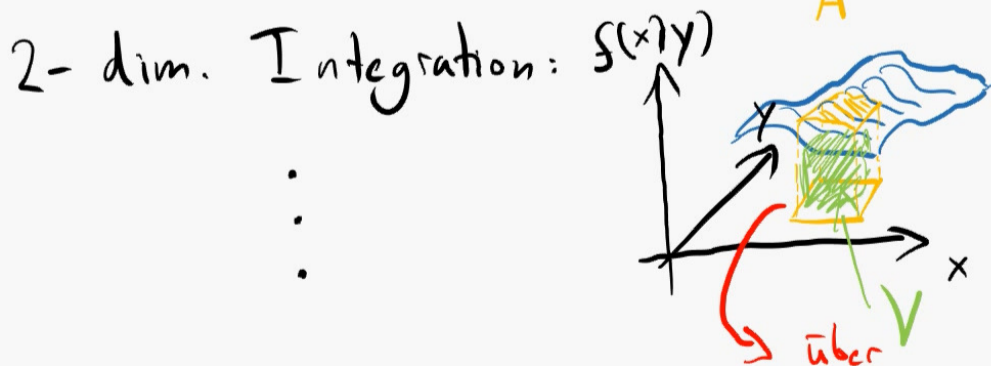(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$\int_G x^2 \, d(x, y)$$

Mehrdimensionale Integration $\longrightarrow$ "Volumen" messen

1, 2, 3 oder 4 dimensional

• 1-dim. Integration: $f(x)$

$$\int_a^b f(x) \, dx = A \quad \leftarrow \text{Fläche}$$

A

2-dim. Integration: $f(x,y)$

$$\int_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} f(x,y) \, d(x,y) = V \quad \leftarrow \text{Volumen}$$

$\rightarrow$ über Riemann-Summen definiert

Wie rechne ich das Integral aus?
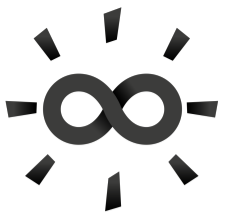
Wenn f stetig ist, dann gilt:

$$\int_{[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]} f(x,y) \, d(x,y) = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y) \, dx \right) dy$$
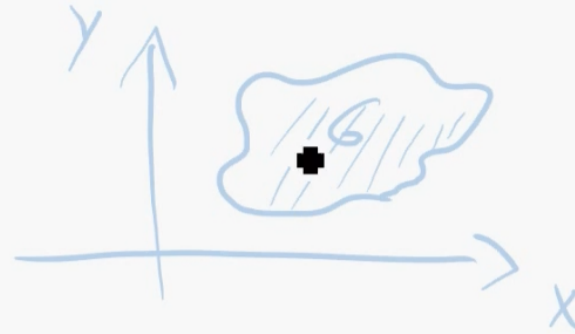
2 ein-dim. Integrale

Satz v. Fubini: (zum Ausrechnen)

f stetig, dann gilt:

$$\int_{[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]} f(x,y) \, d(x,y) = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y) \, dy \right) dx$$

$$= \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y) \, dx \right) dy$$

Aufgabe 1

(a) Skizziere die Menge

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \leq y, \ y + x^2 \leq 3\} .$$

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

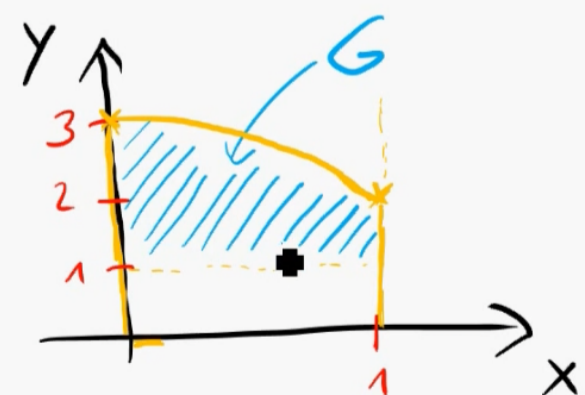$$\int_G x^2 \, d(x, y)$$

(a) Skizziere die Menge

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \leq y, \ y + x^2 \leq 3\} .$$

Ungleichungen einzeln aufschreiben:

$$\begin{cases} 0 \leq x \\ x \leq 1 \\ 1 \leq y \\ y \leq 3 - x^2 \end{cases}$$

Skizze:

$\Longleftrightarrow$ $x \in [0, 1]$, $y \in [1, 3 - x^2]$

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$I = \int_G x^2 \, d(x,y) \quad \leftarrow f(x,y)$$

$$I = \int_G x^2 \, d(x,y) = \int_{"[0,1] \times [1,3-x^2]"} x^2 \, d(x,y)$$

Fubini
$$= \int_0^1 \left(\int_1^{3-x^2} x^2 \, dy \right) dx = \int_0^1 x^2 \left(3 - x^2 - 1 \right) dx = \frac{7}{15}$$

- **mehrdimensionale Integration**

Aufgabe 2

(a) Skizziere die Menge

$$B := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} - x \leq \frac{1}{2} \leq x + y \leq 1 \leq 1 + y \right\}.$$

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$I = \int_B \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) d(x,y)$$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $u = x - y$ und $v = x + y$ und damit die Transformationsformel.

Substitution (Transformationsformel)

$G, \tilde{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ (offen), $\Phi : G \longrightarrow \tilde{G}$

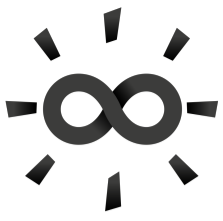differenzierbar, bijektiv, und $\tilde{\Phi}^{-1} : \tilde{G} \longrightarrow G$ differenzierbar.

Dann gilt für integrierbares f:

$$\int_{\Phi(G) = \tilde{G}} f(y_1, \ldots, y_n)\, d(y_1, \ldots, y_n) = \int_G f(\Phi(x_1, \ldots, x_n)) \, |\det J_\Phi (x_1, \ldots, x_n)| \, d(x_1, \ldots, x_n)$$

Funktion wird besser!

Merke: " $y = \Phi(x)$, $dy = \Phi'(x)\, dx$ "

$|\det J_\Phi(x)|$

G wird "besser".

mehrdimensionale Integration

Aufgabe 2

(a) Skizziere die Menge

$$B := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{2} - x \le \frac{1}{2} \le x + y \le 1 \le 1 + y \right\}.$$

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$I = \int_B \cos\left(\frac{x - y}{x + y}\right) \, d(x,y)$$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $u = x - y$ und $v = x + y$ und damit die Transformationsformel.

(a) Skizziere die Menge

$$B := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{2} - x \le \frac{1}{2} \le x + y \le 1 \le 1 + y \right\}.$$

$$= \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} \frac{1}{2} - x \le \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \; x \ge 0 \\[4pt] 1 \le 1 + y \quad \Leftrightarrow \; y \ge 0 \\[4pt] x + y \in [\frac{1}{2}, 1] \end{array} \right\}$$

$$\frac{1}{2} \le x + y \quad \Leftrightarrow \quad y \ge \frac{1}{2} - x$$

$$x + y \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \le 1 - x$$

Mehrdimensionale Integration

Aufgabe 2

(a) Skizziere die Menge

$$B := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} - x \le \frac{1}{2} \le x + y \le 1 \le 1 + y \right\}.$$
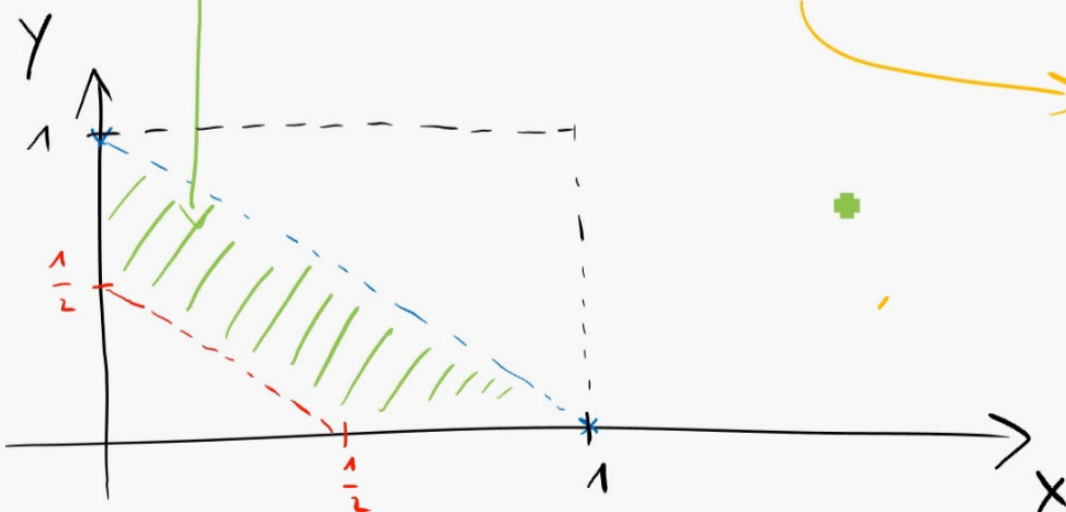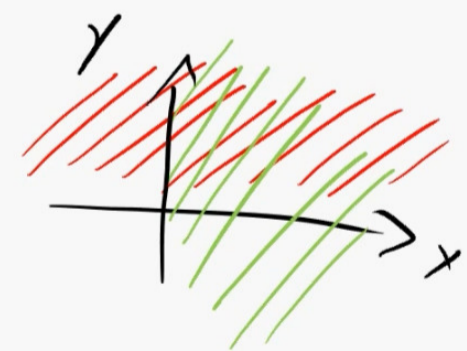
(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$I = \int_B \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) d(x,y)$$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $u = x - y$ und $v = x + y$ und damit die Transformationsformel.

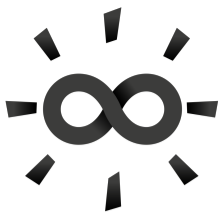## Substitution (Transformationsformel)

$G, \tilde{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ (offen), $\Phi : G \longrightarrow \tilde{G}$

differenzierbar, bijektiv, und $\Phi^{-1} : \tilde{G} \longrightarrow G$ differenzierbar.

Dann gilt für integrierbares f:

$$\int_{\Phi(G) = \tilde{G}} f(y_1, \dots, y_n) \, d(y_1, \dots, y_n) = \int_G f(\Phi(x_1, \dots, x_n)) \, |\det J_\Phi(x_1, \dots, x_n)| \, d(x_1, \dots, x_n)$$

Funktion wird besser!

Merke: " $y = \Phi(x)$, $dy = \Phi'(x) \, dx$ "

$|\det J_\Phi(x)|$

G wird "besser".

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$I = \int_{B\,\tilde{G}} \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) d(x,y)$$

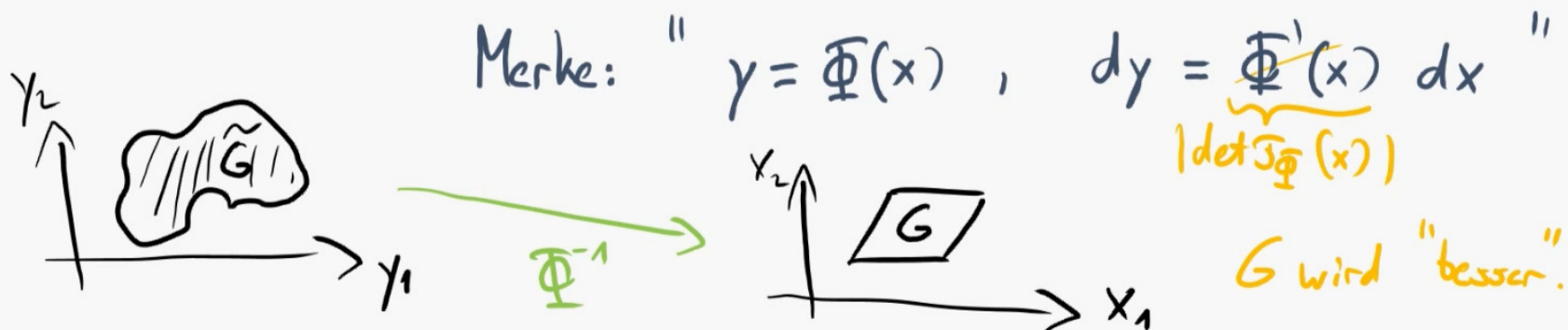*Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $u = x - y$ und $v = x + y$ und damit die Transformationsformel.*
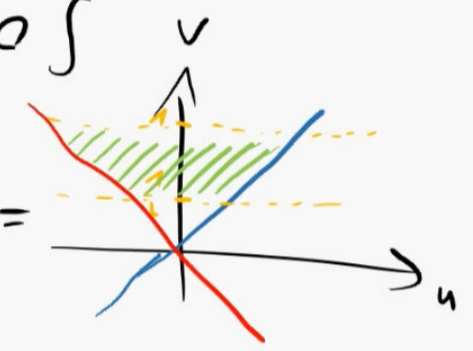
$$\tilde{G}$$
$$B := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} - x \leq \frac{1}{2} \leq x + y \leq 1 \leq 1 + y \right\}$$

$$\boxed{B = \tilde{G}}$$

$$\Phi^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} \begin{array}{l} = u \\ = v \end{array} \implies \begin{array}{l} u + v = 2x \\ v - u = 2y \end{array}$$

$G_{\shortparallel}$

$$\Phi^{-1}(\tilde{G}) = \left\{ (u,v) \mid v \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right], \ u + v \geq 0, \ v - u \geq 0 \right\} \quad v$$

$$= \left\{ (u,v) \mid v \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right], \ \underbrace{v \geq -u, \ v \geq u}_{u \in [-v, v]} \right\}, \quad G =$$

Rechnung:

$$I = \underset{B = \tilde{G} = \Phi(G)}{\int f(x,y)\, d(x,y)} \overset{\text{Transf.}}{=} \int_G f(\underbrace{\Phi(u,v)}_{\cos\left(\frac{u}{v}\right)}) \, |\det J_\Phi(u,v)| \, d(u,v)$$

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u+v) \\ \frac{1}{2}(v-u) \end{pmatrix}$$

$$J_\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \det J_\Phi = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$= \int_G \cos\left(\frac{u}{v}\right) \cdot \frac{1}{2} \, d(u,v)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{2}\left[\int_{1/2}^{1} \left(\int_{-v}^{v} \cos\left(\tfrac{u}{v}\right) du \right) dv \right] = \frac{1}{2} \int_{1/2}^{1} v \cdot \sin\left(\tfrac{u}{v}\right) \Big|_{u=-v}^{v} dv$$

(*ung. Fkt*)

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{1/2}^{1} v \cdot \left(\underbrace{\sin(1) - \sin(-1)}_{+\sin(1)} \right) dv \right] = \frac{1}{2} \cdot 2\sin(1) \left[\tfrac{1}{2} v^2 \right]_{1/2}^{1} = \underline{\frac{3}{8} \sin(1)}$$
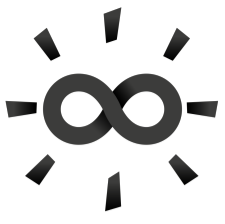
Mehrdimensionale Integration

Aufgabe 3

(a) Skizziere die Menge

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x^2,\ 0 \leq x \leq 2\}\,.$$
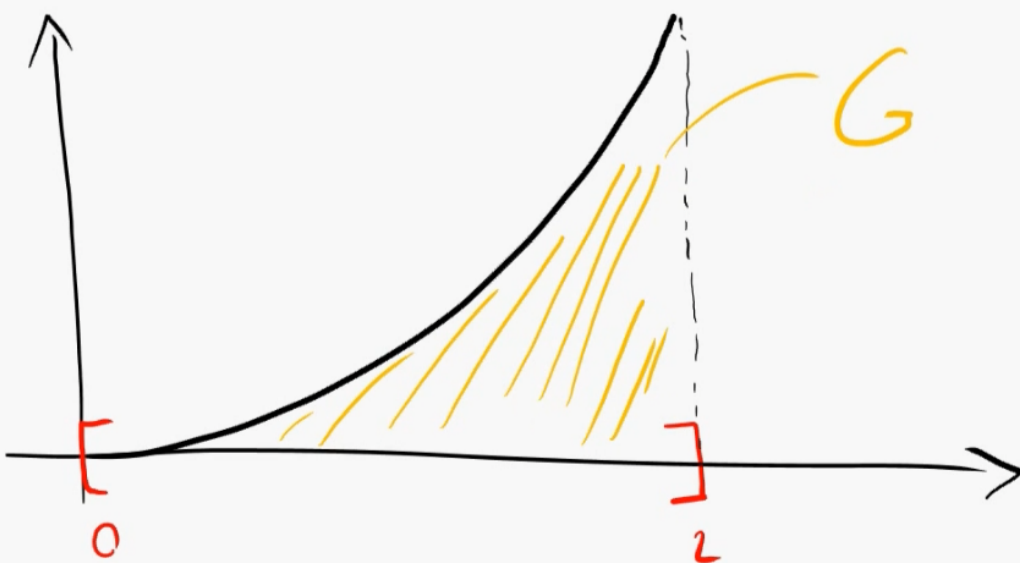
(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$\int_G (x^2 + y^2)\, d(x, y)\,.$$

(a) Skizziere die Menge

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x^2,\ 0 \leq x \leq 2\}\,.$$

$$= \left\{(x,y) \,\middle|\, x \in [0,2]\,,\ y \in [0, x^2]\right\}$$
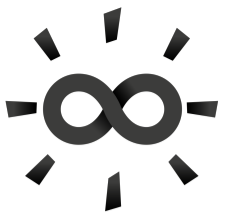

G

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$I = \int_G (x^2 + y^2) \, d(x, y) .$$

$$I = \int_G (x^2 + y^2) \, d(x,y) = \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} (x^2 + y^2) \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2 \cdot y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^2 \left(x^4 + \frac{1}{3} x^6 \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{3 \cdot 7} x^7 \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{5} \cdot 2^5 + \frac{1}{21} 2^7 = \frac{1312}{105} \approx 12,5$$

Aufgabe 4

mehrdimensionale Integration (Satz v. Fubini)

(a) Skizziere die Menge

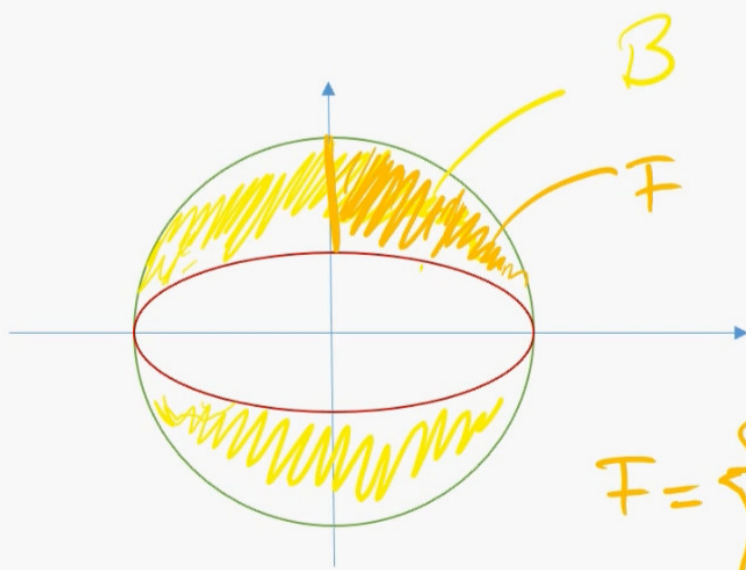$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + 4y^2, \; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$I = \int_B (|x| + |y|) \, d(x, y)$$

mit Hilfe des Satzes von Fubini auf zwei verschiedene Weisen.

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \underbrace{x^2 + 4y^2}_{\text{Ellipse}}, \; \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{\text{Kreis mit Radius 1}}\}.$$

$$I = \int_B (|x| + |y|) \, d(x, y) \qquad \left(y^* \leq \sqrt{1 - x^2} \right)$$

B

F

$$I = \int_B (|x| + |y|) \, d(x, y)$$

$$= 4 \cdot \int_F (x + y) \, d(x, y)$$

$$F = \left\{ (x, y) \; \middle| \; x \in [0, 1], \; y \in \left[\tfrac{1}{2}\sqrt{1 - x^2}, \; \sqrt{1 - x^2} \right] \right\}$$

$$F = \left\{ (x, y) \; \middle| \; y \in [0, 1], \; x \in \left[\sqrt{1 - 4y^2}, \; \sqrt{1 - y^2} \right] \right\}$$

$$I = \int_B \left(|x|+|y|\right) d(x,y) = 4 \cdot \int_F \left(|x| + |y|\right) d(x,y)$$

$$\underset{x \text{ und } y \geq 0}{}$$

$$= 4 \cdot \int_F (x + y) \, d(x,y) = 4 \cdot \int_0^1 \left(\int_{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x+y) \, dy \right) dx$$

$$= 4 \cdot \int_0^1 \left[x \cdot y + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= 4 \cdot \int_0^1 \left[x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(1-x^2) - x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(1-x^2)\right] dx$$

$$= 4 \cdot \frac{5}{12}$$

$$I = \int_B \left(|x|+|y|\right) d(x,y) = 4 \int_F (x+y) \, d(x,y)$$

$$= 4 \cdot \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-4y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x+y) \, dx \right) dy$$

$$= 4 \cdot \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 + x \cdot y \right]_{x=\sqrt{1-4y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$= 4 \cdot \frac{5}{12}$$
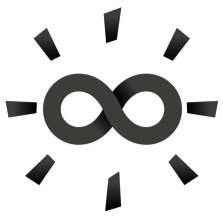
mehrdimensionale Integration

Aufgabe 5

(a) Skizziere die Menge

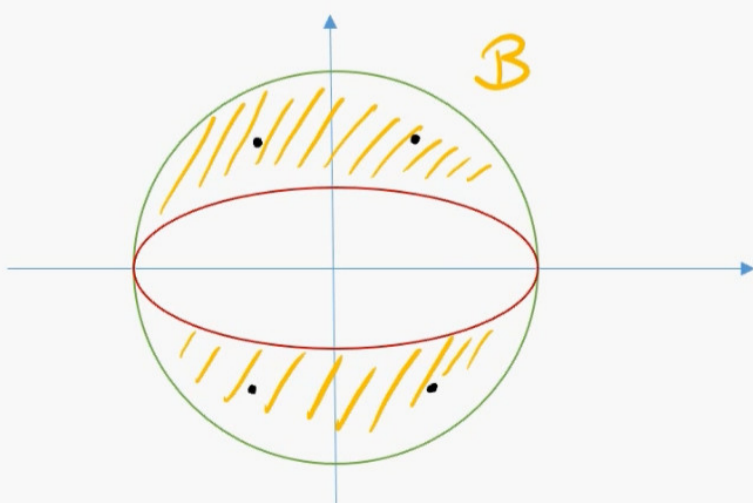$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + 4y^2, \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$\int_B xy \, d(x, y)$$

mit Hilfe von Symmetrieargumenten.

(a) Skizziere die Menge

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \underbrace{x^2 + 4y^2}_{\text{Ellipse}}, \ \underbrace{x^2 + y^2}_{\text{Kreis}} \leq 1\}.$$
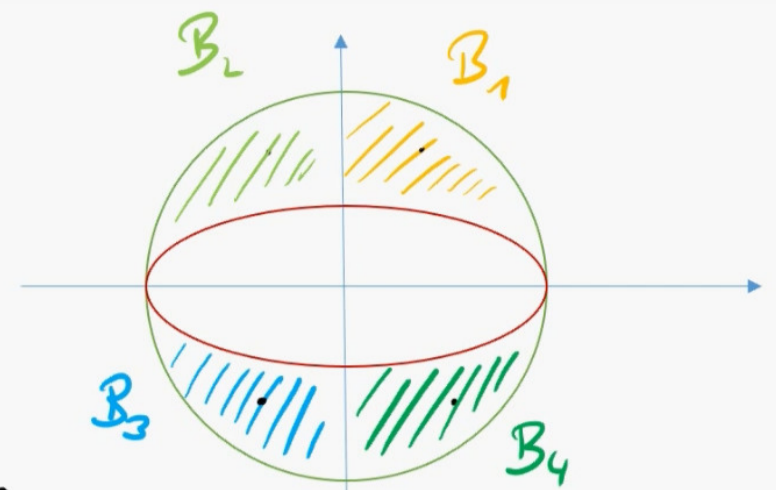
$$f(x, y) = x \cdot y$$

Funktion ist "symmetrisch"
bis auf Vorzeichen.

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

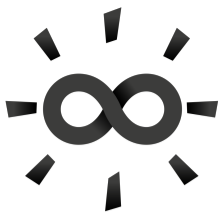$$I = \int_B xy\, d(x,y)$$

mit Hilfe von Symmetrieargumenten.

$$I = \int_{B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4} x \cdot y \, d(x,y) =$$

$$\left[\text{Funktion } f \text{ ist symmetrisch bezüglich dieser Zerlegung in } B_1, B_2, B_3, B_4\right]$$

$$= \int_{B_1} \overset{>0}{x} \cdot \overset{>0}{y} \, d(x,y) + \int_{B_2} x \cdot \overset{>0}{y} \, d(x,y) + \int_{B_3} x \cdot y \, d(x,y) + \int_{B_4} \overset{>0}{x} \cdot y \, d(x,y)$$

$$= \int_{B_1} x \cdot y \, d(x,y) + \int_{B_1}(-x) \cdot y \, d(x,y) + \int_{B_1}(-x)(-y) \, d(x,y) + \int_{B_1} x \cdot (-y) \, d(x,y) =$$

$$= \int_{B_1} x \cdot y \, d(x,y) \cdot (1 - 1 + 1 - 1) = 0$$

Aufgabe 6   Transformationsformel

(a) Skizzieren Sie einen viertelkreisförmigen Tisch und berechnen Sie die Masse
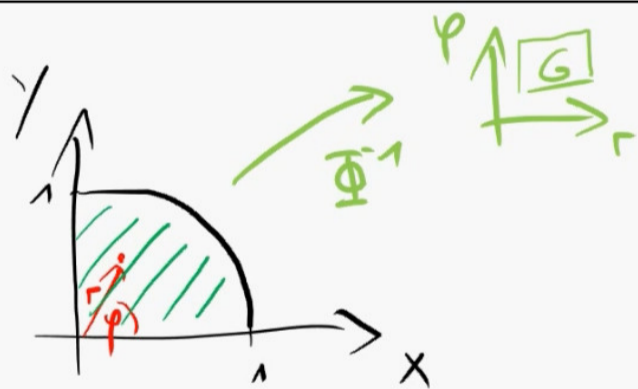
$$M = \int_{\text{Tisch}} 1 \, d(x,y) \, ,$$

indem Sie auf <u>Polarkoordinaten</u> transformieren.

(b) Berechne Sie nun ebenfalls den Schwerpunkt des Tisches, d.h.

$$s_x = \frac{1}{M} \int_{\text{Tisch}} x \, d(x,y) \, , \quad \text{und} \quad s_y = \frac{1}{M} \int_{\text{Tisch}} y \, d(x,y) \, .$$

(c) Wie groß ist das Trägheitsmoment des Tisches, wenn dieser um seine Ecke rotiert wird? (Das heißt, die Drehachse befindet sich im Kreismittelpunkt senkrecht zur Tischebene.)

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{"}x \\ \text{"}y \end{matrix}$$

$$\int_{\Phi(G)} f(x,y)\, d(x,y) = \int_G f(\Phi(r,\varphi)) \cdot |\det J_\Phi(r,\varphi)| \, d(r,\varphi)$$

$$\underset{=1 \ (\text{bei (a)})}{} \qquad \underset{=1 \ (\text{bei (a)})}{}$$

"Tisch (G̃)

$$J_\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \det J_\Phi(r,\varphi) = r \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1}$$

$$\text{"}r$$

$$G = [0,1] \times [0,\tfrac{\pi}{2}]$$
$$\qquad r \qquad\qquad \varphi$$

(a) Masse: $M = \int\limits_{Tisch} 1 \, d(x,y) \overset{\text{Transf. auf Polarkoordinaten}}{=} \int\limits_{[0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]} 1 \cdot r \, d(r,\varphi)$

$$= \int\limits_{0}^{1} \left(\int\limits_{0}^{\pi/2} r \, d\varphi \right) dr = \frac{\pi}{4}$$

(b) Schwerpunkt: $S_x = \frac{1}{M} \int\limits_{Tisch} x \, d(x,y) \overset{\text{Transf.}}{=} \frac{1}{M} \int\limits_{0}^{1} \left(\int\limits_{0}^{\pi/2} r\cos\varphi \cdot r \, d\varphi \right) dr$
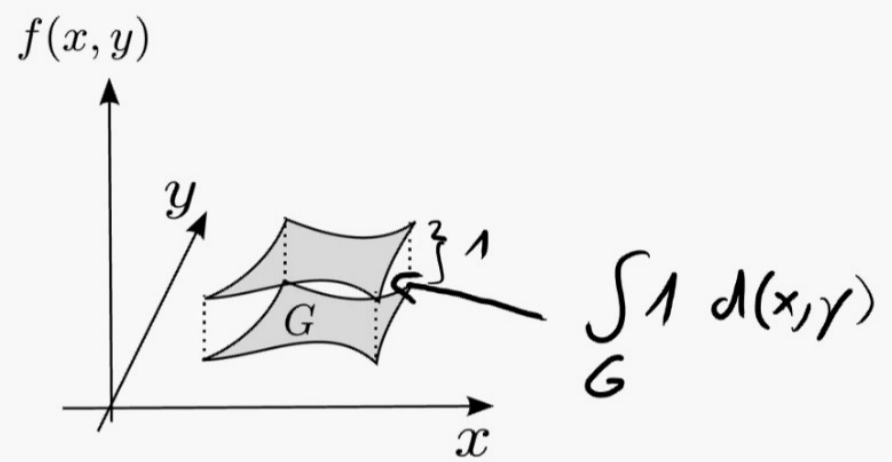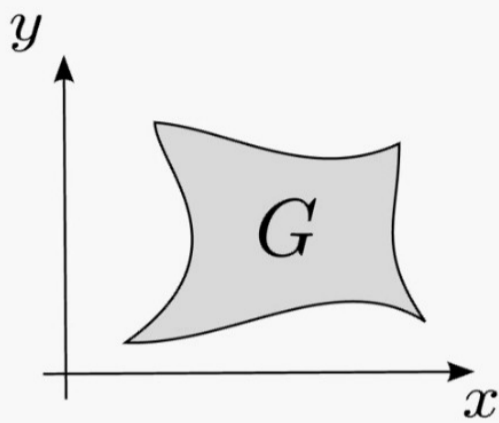
$$= \frac{4}{3\pi} = S_y \qquad \text{(aus Symmetriegründen)}$$

(c) Trägheitsmoment: $\tau = \int\limits_{Tisch} (x^2 + y^2) \, d(x,y) \overset{\text{Transf.}}{=} \int\limits_{0}^{1} \left(\int\limits_{0}^{\pi/2} r^2 \cdot r \, d\varphi \right) dr$
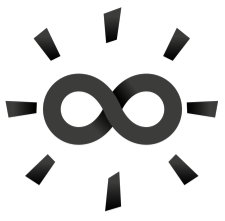
$$= \frac{\pi}{8}$$

Mehrdimensionale Integration um Flächen oder Volumina zu berechnen.


$$\text{Flächeninhalt}(G) = \int_G 1 \, d(x,y)$$

Hilfmittel:
- Transformationsformel (Kugelkoordinaten)
- Satz v. Fubini

Aufgabe 7 Flächenberechnung mit mehrdim. Integration

Skizzieren Sie die folgenden Fläche und berechnen Sie die Flächeninhalt mit Hilfe eines zweidimensionalen Integrals:

Die Fläche im 1. Quadraten $(x, y \geq 0)$ zwischen den Geraden $y = x$ und $x = 3 > 0$ und der Hyperbel $y = \lambda^2/x$ mit $0 < \lambda < 3$. $\longrightarrow$ $y = \frac{1}{x}$

$y = x$

$y = \frac{\lambda^2}{x}$

A_1 $\quad$ A_2

λ $\quad$ 3 $\quad$ A
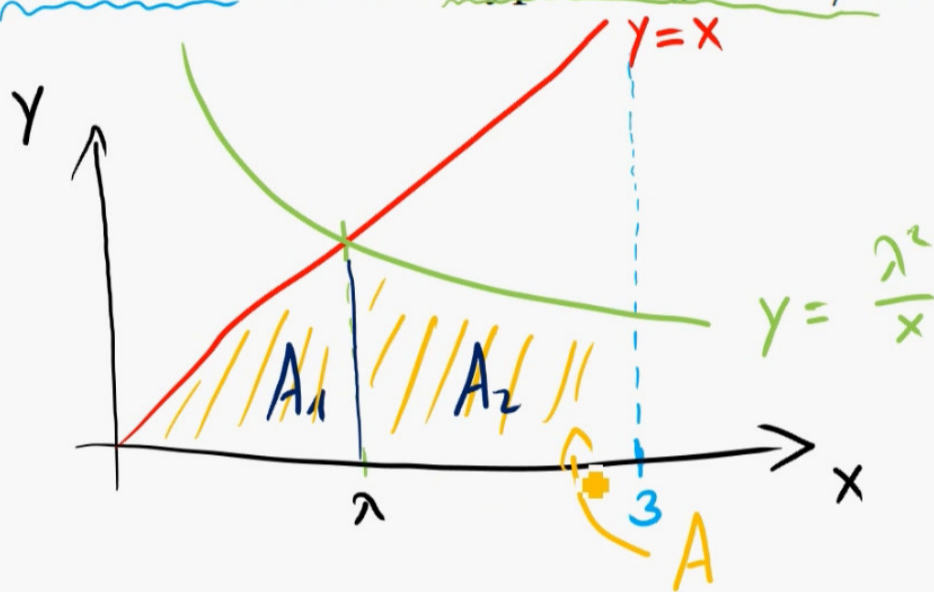
Gleichsetzen für den Schnittpunkt:

$$x = \frac{\lambda^2}{x}$$

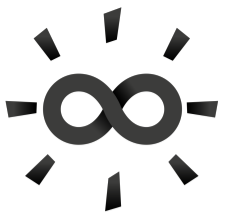$$\Rightarrow x^2 = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad x = \lambda$$

$$A = A_1 + A_2 = \int_{A_1} 1 \, d(x,y) + \int_{A_2} 1 \, d(x,y)$$

$$A = A_1 + A_2 = \int_{A_1} d(x,y) + \int_{A_2} d(x,y)$$

$$= \int_0^\lambda \left(\int_0^x 1 \, dy \right) dx + \int_\lambda^3 \left(\int_0^{\lambda^2/x} 1 \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^\lambda x \, dx + \int_\lambda^3 \frac{\lambda^2}{x} \, dx = \frac{1}{2} \lambda^2 + \lambda^2 \left[\ln |x| \right]_\lambda^3$$

$$= \lambda^2 \left[\frac{1}{2} + \ln \left(\frac{3}{\lambda} \right) \right]$$
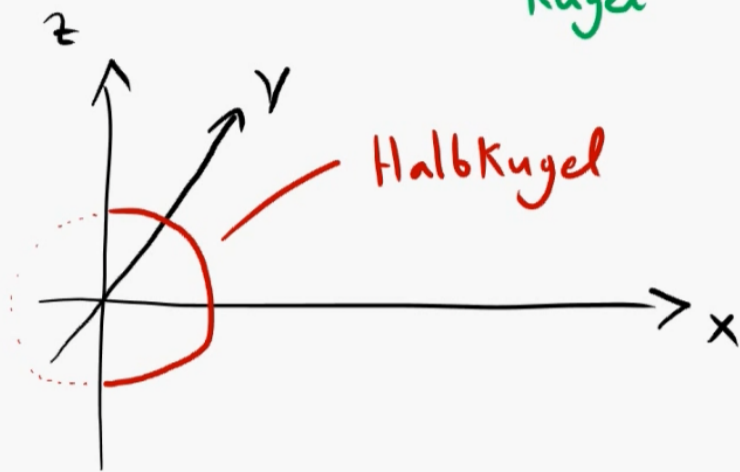
Aufgabe 8   Volumenberechnung mit mehrdim. Integralen

Skizzieren Sie den folgenden Körper und berechnen Sie das Volumen mit Hilfe von
dreidimensionalen Integralen r^2

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1}_{Kugel}, \underbrace{y \geq 0}_{} \}.$

$r\sin\theta\sin\varphi$

$vol(A) = \int_A 1 \, d(x,y,z)$

Kugel

schneidet Kugel ab

— Halbkugel

$A = \text{Halbkugel}, \qquad vol(A) = \int_A 1 \, d(x,y,z)$

Transformation in Kugelkoordinaten

$(x,y,z) \quad \overset{\Phi^{-1}}{\longrightarrow} \quad (r, \varphi, \theta)$

$\boxed{A} \longrightarrow \boxed{B}$

$\Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\,\cos\varphi \\ r\sin\theta\,\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$
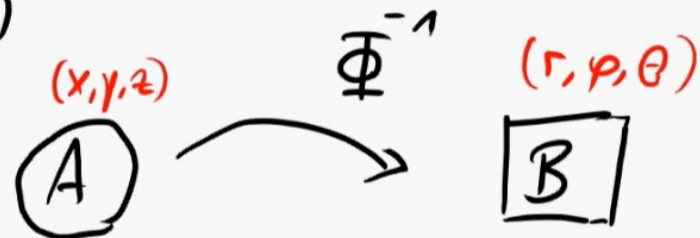
, $\Phi^{-1} = ?$

Transformationsformel:

$\underbrace{\int\limits_{\Phi(B)=A} \underbrace{f(x,y,z)}_{1} \, d(x,y,z)}_{} = \int\limits_{B} \underbrace{f(\Phi(r,\varphi,\theta))}_{1} \underbrace{\left| \det J_\Phi(r,\varphi,\theta) \right|}_{?} \, d(r,\varphi,\theta)$

immer bei Kugelkoordinaten
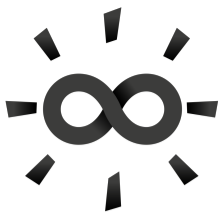
$B = \Phi^{-1}(A) = \{ (r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi],$

$r \leq 1, \quad r\sin\theta\sin\varphi \geq 0 \}$

$$B = \left\{ (r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0, 1],\ \varphi \in [0, 2\pi],\ \theta \in [0, \pi],\ \underset{\geq 0}{r}\ \underset{\geq 0}{\sin \theta}\ \sin \varphi \geq 0 \right\}$$

$$\varphi \in [0, \pi]$$

$$= \left\{ (r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0, 1],\ \varphi \in [0, \pi],\ \theta \in [0, \pi] \right\}$$

$$\det J_{\Phi}(r, \varphi, \theta) = r^2 \sin \theta \qquad (\text{merken, nachrechnen!})$$

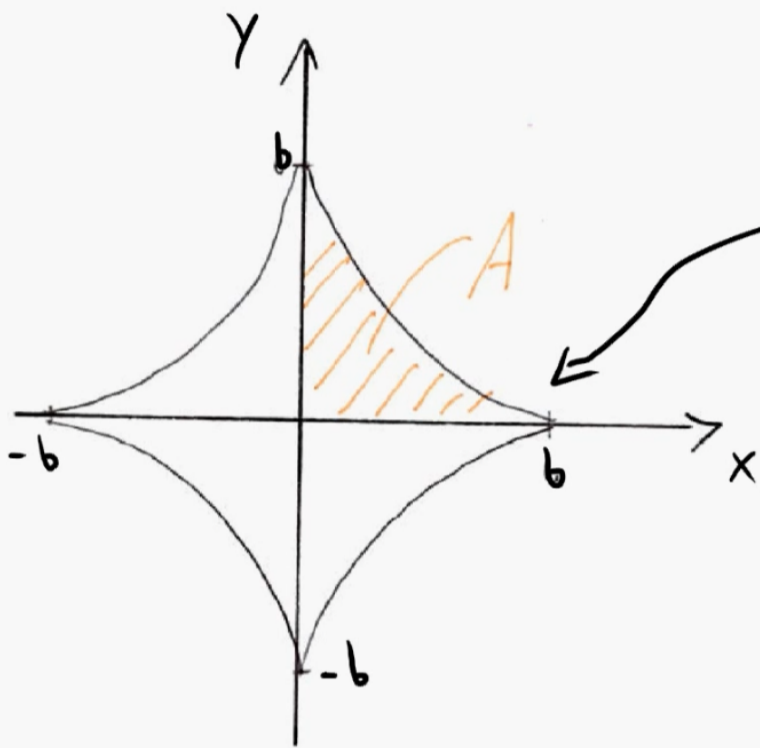$$\text{vol}(A) = \int_A 1\ d(x, y, z) \overset{\text{Transf.}}{=} \int_B 1\ |r^2 \sin \theta|\ d(r, \varphi, \theta)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^\pi r^2 \sin \theta\ d\theta \right) d\varphi \right) dr = \frac{4}{6} \pi$$

Aufgabe 9

Skizzieren Sie die Astroide beschrieben durch $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = a > 0$. Berechnen Sie den eingeschlossenen Flächeninhalt mit Hilfe von neuen Koordinaten $x = \rho \cos^3(\theta)$ und $y = \rho \sin^3(\theta)$.

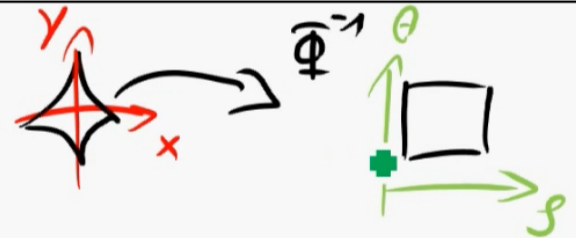
$$a = b^{2/3} \quad , \quad \boxed{b := a^{3/2}}$$

Stern kurve hat Parametrisierung:

$$\theta \longmapsto \begin{pmatrix} b \cos^3 \theta \\ b \sin^3 \theta \end{pmatrix}$$

Gesucht: Fläche $= 4 \cdot A = 4 \cdot \int_A 1 \, d(x,y)$

Neue Koordinaten: $\overline{\Phi}(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho \cos^3 \theta \\ \rho \sin^3 \theta \end{pmatrix} \begin{matrix} = x \\ = y \end{matrix}$

Transformationsformel:

$$\int_{A = \overline{\Phi}(B)} 1 \, d(x,y) = \int_B 1 \cdot |\det J_{\overline{\Phi}}(\rho, \theta)| \, d(\rho, \theta)$$

Jacobi-Determinante:

$$\det J_{\overline{\Phi}}(\rho, \theta) = \det \begin{pmatrix} \cos^3 \theta & 3\rho \cos^2 \theta \, (-\sin \theta) \\ \sin^3 \theta & 3\rho \sin^2 \theta \, \cos \theta \end{pmatrix} =$$

$$= \cos^4 \theta \, \sin^2 \theta \cdot 3\rho + \cos^2 \theta \, \sin^4 \theta \cdot 3\rho = 3\rho \cos^2 \theta \, \sin^2 \theta \, \left(\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_{= 1} \right)$$

$$= 3\rho \, \big(\underbrace{\cos \theta \, \sin \theta}_{\frac{1}{2} \sin(2\theta)} \big)^2 = 3\rho \cdot \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) = \frac{3}{4}\rho \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos(4\theta))$$

$$\lceil \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2 x \rceil \qquad = \frac{3}{8}\rho \, (1 - \cos(4\theta))$$

Was ist B?

$$\bar{\Phi}^1(A) = B = \left\{ (\rho, \theta) \mid \rho \in [0, b] , \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \right\}$$

$$\text{Fläche} = 4 \cdot A = 4 \cdot \underset{\Phi(B)}{\int} 1 \, d(x, y) = 4 \cdot \underset{B}{\int} 1 \cdot \rho \frac{3}{8} (1 - \cos(4\theta)) \, d(\rho, \theta)$$

$$= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^b \frac{3}{8} \rho (1 - \cos(4\theta)) \, d\rho \right) d\theta \quad \Leftarrow \quad \left(b^2 = a^3 \right)$$

$$= 4 \cdot \frac{3}{32} \pi a^3 \qquad = \frac{3}{8} \pi a^3$$