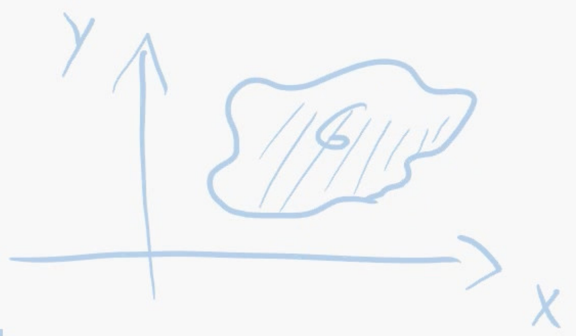
The Bright Side of Mathematics

The following pages cover the whole Mehrdimensionale Integration course of the Bright Side of Mathematics. Please note that the creator lives from generous supporters and would be very happy about a donation. See more here: https://tbsom.de/support

Have fun learning mathematics!



Aufgabe 1

(a) Skizziere die Menge

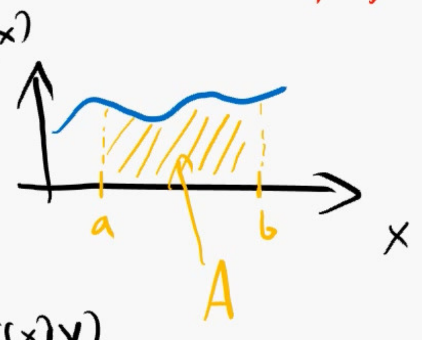
$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \leq y,\ y + x^2 \leq 3\}\,.$$

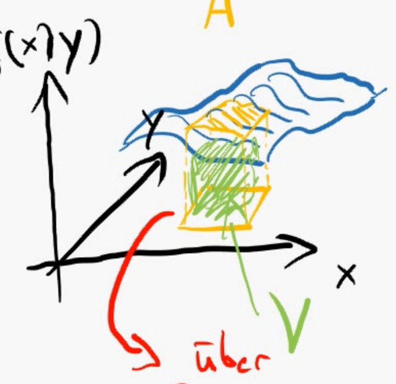
(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$\int_G x^2 \, d(x,y)$$

Mehrdimensionale Integration → "Volumen" messen

1, 2, 3 oder 4 dimensional

- 1-dim. Integration:  $\int_a^b f(x)\,dx = A$ ← Fläche

2-dim. Integration:  $\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x,y)\,d(x,y) = V$ ← Volumen

⋮

über Riemann-Summen definiert

Wie rechne ich das Integral aus?

Wenn f stetig ist, dann gilt: $\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\right)dy$

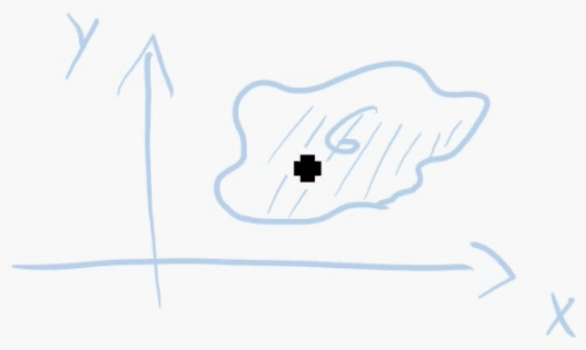
2 ein-dim. Integrale

Satz v. Fubini: (zum Ausrechnen)

f stetig, dann gilt:

$$\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\right)dy$$



Aufgabe 1

(a) Skizziere die Menge

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \leq y,\ y + x^2 \leq 3\}\,.$$

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$\int_G x^2 \, d(x,y)$$

(a) Skizziere die Menge

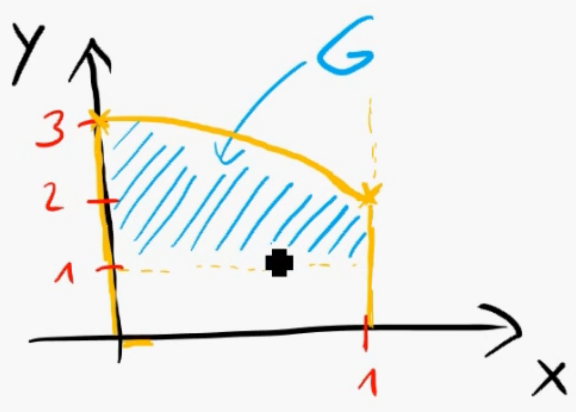
$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \leq y,\ y + x^2 \leq 3\}\,.$$

Ungleichungen einzeln aufschreiben:

$$\begin{cases} 0 \leq x \\ x \leq 1 \\ 1 \leq y \\ y \leq 3 - x^2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \in [0,1]\,, \quad y \in [1, 3-x^2]$$

Skizze:



(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$I = \int_G \underbrace{x^2}_{= f(x,y)} \, d(x,y)$$

$$I = \int_G x^2 \, d(x,y) \;\text{``=''}\; \int_{[0,1]\times[1,3-x^2]} x^2 \, d(x,y)$$

Fubini

$$= \int_0^1 \left(\int_1^{3-x^2} x^2 \, dy \right) dx = \int_0^1 x^2 (3 - x^2 - 1)\, dx = \underline{\underline{\frac{7}{15}}}$$

- Mehrdimensionale Integration

Aufgabe 2

(a) Skizziere die Menge

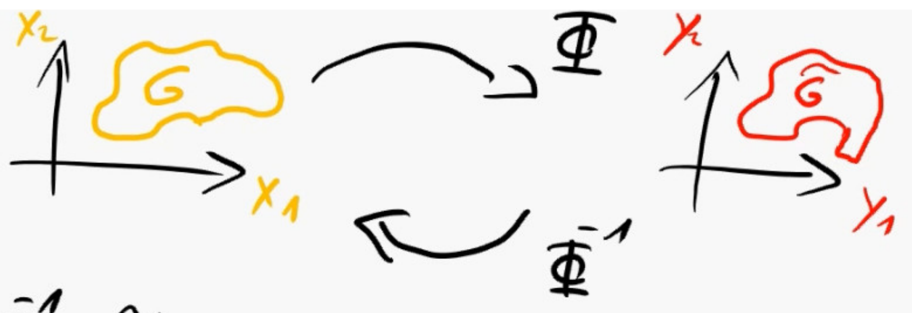
$$B := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{2} - x \leq \frac{1}{2} \leq x + y \leq 1 \leq 1 + y \right\}.$$

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$I = \int_B \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) \, d(x,y)$$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $u = x - y$ und $v = x + y$ und damit die Transformationsformel.

Substitution (Transformationsformel)



$G, \tilde{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ (offen), $\Phi : G \to \tilde{G}$

differenzierbar, bijektiv, und $\Phi^{-1} : \tilde{G} \to G$ differenzierbar.

Dann gilt für integrierbares f:

$$\int_{\Phi(G) = \tilde{G}} f(y_1, \dots, y_n) \, d(y_1, \dots, y_n) = \int_G \underbrace{f(\Phi(x_1, \dots, x_n)) \, |\det J_\Phi(x_1, \dots, x_n)|}_{\text{Funktion wird besser!}} \, d(x_1, \dots, x_n)$$

Merke: " $y = \Phi(x)$, $dy = \underbrace{\Phi'(x)}_{|\det J_\Phi(x)|} dx$ "

G wird "besser".

Mehrdimensionale Integration

Aufgabe 2

(a) Skizziere die Menge

$$B := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} - x \leq \frac{1}{2} \leq x + y \leq 1 \leq 1 + y \right\} .$$

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

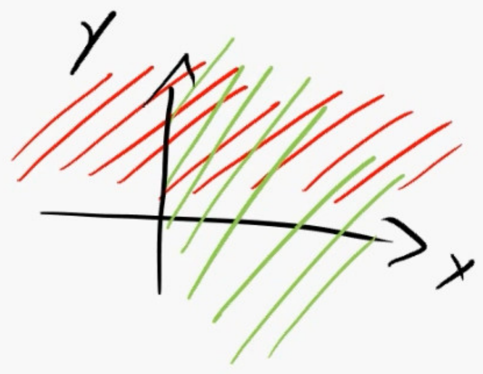
$$I = \int_B \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) \, d(x,y)$$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $u = x - y$ *und* $v = x + y$ *und damit die Transformationsformel.*

(a) Skizziere die Menge

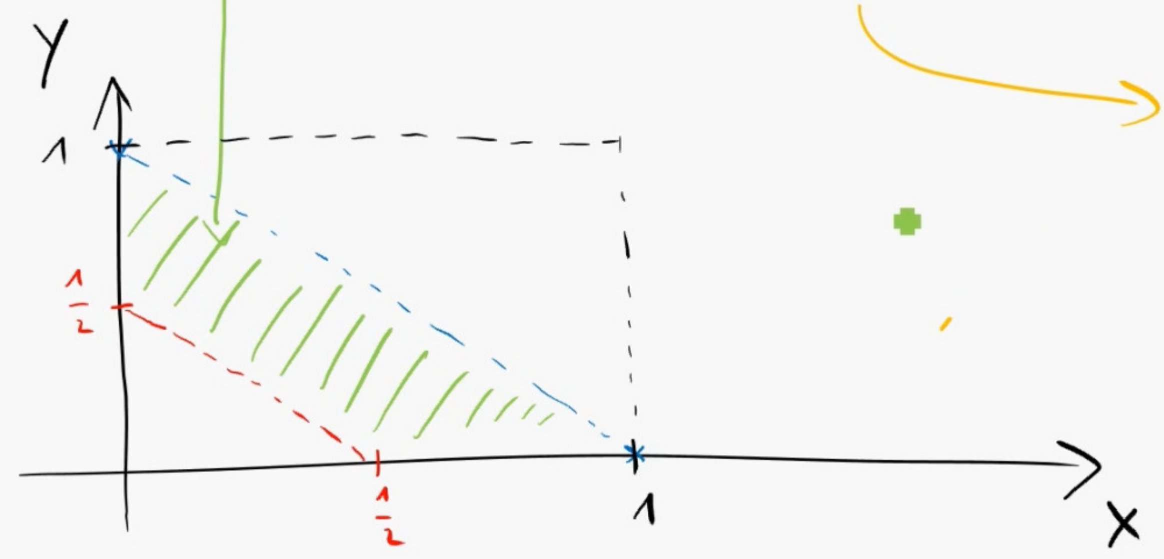
$$B := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} - x \leq \frac{1}{2} \leq x + y \leq 1 \leq 1 + y \right\} .$$

$$= \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} \frac{1}{2} - x \leq \frac{1}{2} \iff x \geq 0 \\ 1 \leq 1 + y \iff y \geq 0 \\ x + y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{array} \right\}$$



$\frac{1}{2} \leq x + y \iff y \geq \frac{1}{2} - x$

$x + y \leq 1 \iff y \leq 1 - x$



Mehrdimensionale Integration

Aufgabe 2

(a) Skizziere die Menge

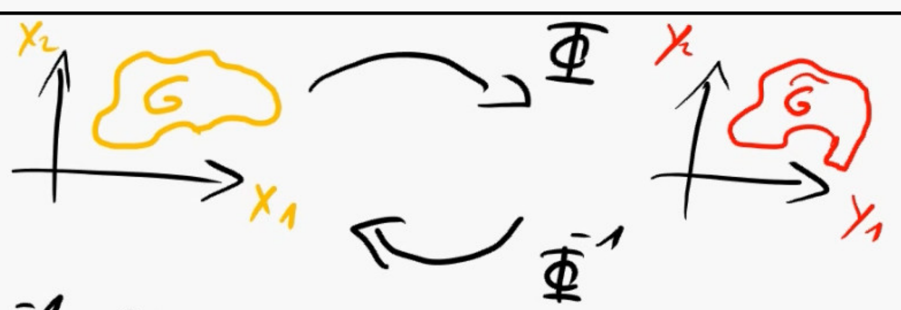
$$B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} - x \leq \frac{1}{2} \leq x + y \leq 1 \leq 1 + y\right\}.$$

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$I = \int_B \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\, d(x,y)$$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $u = x - y$ und $v = x + y$ und damit die Transformationsformel.

Substitution (Transformationsformel)



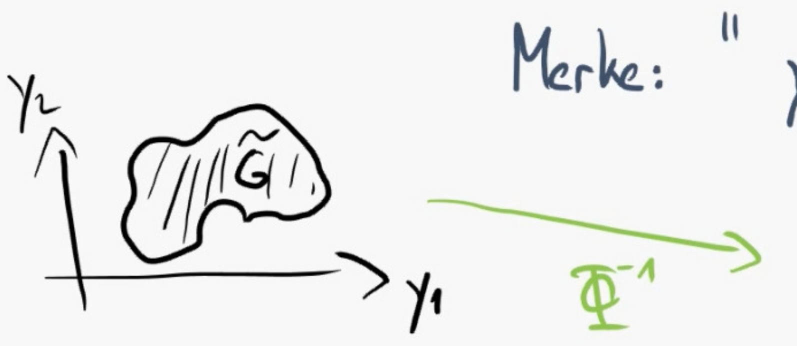
$G, \tilde{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ (offen), $\Phi: G \to \tilde{G}$

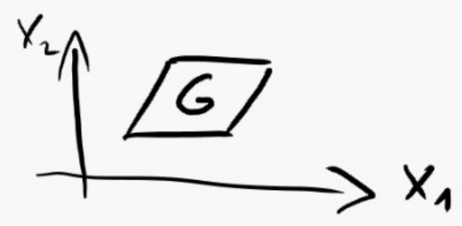
differenzierbar, bijektiv, und $\Phi^{-1}: \tilde{G} \to G$ differenzierbar.

Dann gilt für integrierbares f:

$$\int_{\Phi(G) = \tilde{G}} f(y_1, \dots, y_n)\, d(y_1, \dots, y_n) = \int_G \underbrace{f(\Phi(x_1, \dots, x_n)) \, |\det J_\Phi(x_1, \dots, x_n)|}_{\text{Funktion wird besser!}}\, d(x_1, \dots, x_n)$$

Merke: " $y = \Phi(x)$, $dy = \underbrace{\cancel{\Phi'(x)}}_{|\det J_\Phi(x)|}\, dx$ "





G wird "besser".

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$I = \int_{\cancel{B}\ \tilde{G}} \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\, d(x,y)$$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $u = x - y$ und $v = x + y$ und damit die Transformationsformel.

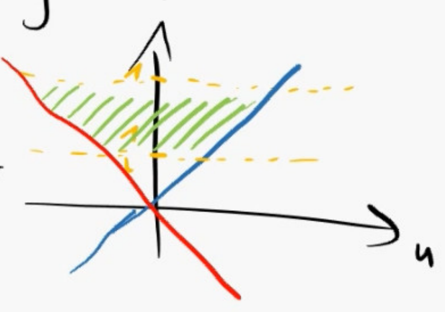
$\overset{\tilde{G}}{\cancel{B}} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} - x \leq \frac{1}{2} \leq x + y \leq 1 \leq 1 + y\right\}$

$\boxed{B = \tilde{G}}$

$$\Phi^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} \begin{matrix} = u \\ = v \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} u + v = 2x \\ v - u = 2y \end{matrix}$$

$$\overset{G}{\rotatebox{90}{=}}\ \Phi^{-1}(\tilde{G}) = \left\{(u,v) \mid v \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right],\ u + v \geq 0,\ v - u \geq 0\right\}$$

$$= \left\{(u,v) \mid v \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right],\ \underbrace{v \geq -u,\ v \geq u}_{u \in [-v, v]}\right\}, \quad G =$$



Rechnung:

$$I = \int_{B = \tilde{G} = \Phi(G)} f(x,y)\, d(x,y) \overset{\text{Transf.}}{=} \int_G \underbrace{f(\Phi(u,v))}_{\cos\left(\frac{u}{v}\right)} \, |\det J_\Phi(u,v)|\, d(u,v)$$

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u+v) \\ \frac{1}{2}(v-u) \end{pmatrix}$$

$$J_\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \det J_\Phi = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$= \int_G \cos\left(\frac{u}{v}\right) \cdot \frac{1}{2}\, d(u,v)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{2}\left[\int_{1/2}^{1} \left(\int_{-v}^{v} \cos\left(\frac{u}{v}\right) du\right) dv\right] = \frac{1}{2} \int_{1/2}^{1} v \cdot \sin\left(\frac{u}{v}\right)\Big|_{u=-v}^{v}\, dv$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{1/2}^{1} v \cdot \Big(\sin(1) \underbrace{- \sin(-1)}_{+\sin(1)}\Big)\, dv\right] = \frac{1}{2} \cdot 2\sin(1) \left[\frac{1}{2} v^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \underline{\frac{3}{8}\sin(1)}$$

(ung. Fkt)

Mehrdimensionale Integration

Aufgabe 3

(a) Skizziere die Menge

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x^2,\ 0 \leq x \leq 2\} .$$

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$\int_G (x^2 + y^2)\, d(x,y) .$$

(a) Skizziere die Menge

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x^2,\ 0 \leq x \leq 2\} .$$

$$= \left\{ (x,y) \,\middle|\, x \in [0,2] \ ,\ y \in [0, x^2] \right\}$$

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$I = \int_G (x^2 + y^2)\, d(x, y)\,.$$

$$I = \int_G (x^2+y^2)\, d(x,y) = \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} (x^2+y^2)\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2 \cdot y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^2 \left(x^4 + \frac{1}{3} x^6 \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{3 \cdot 7} x^7 \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{5} \cdot 2^5 + \frac{1}{21} 2^7 = \underline{\underline{\frac{1312}{105}}} \approx 12{,}5$$

Aufgabe 4

mehrdimensionale Integration (Satz v. Fubini)

(a) Skizziere die Menge

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + 4y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}\,.$$

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

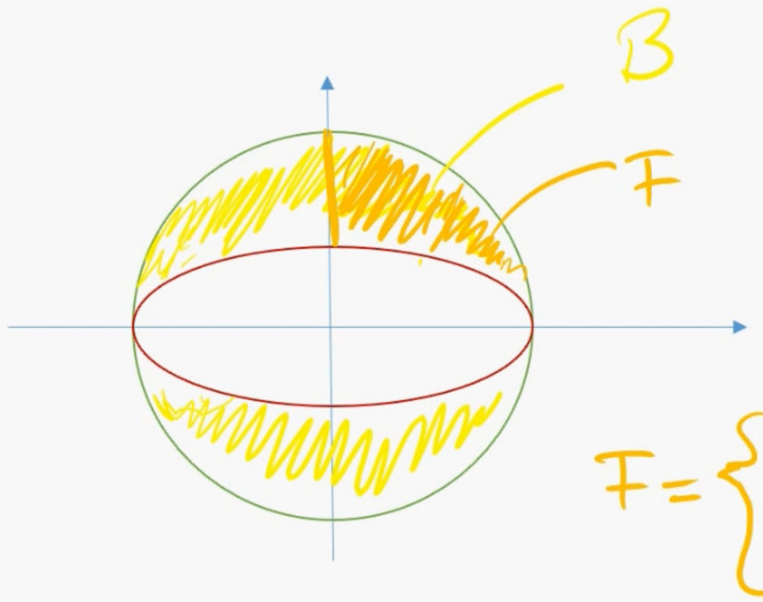
$$I = \int_B (|x| + |y|)\, d(x,y)$$

mit Hilfe des Satzes von Fubini auf zwei verschiedene Weisen.

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \underbrace{x^2 + 4y^2}_{\text{Ellipse}},\ \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{\text{Kreis mit Radius 1}}\}\,.$$

$$I = \int_B (|x| + |y|)\, d(x,y)$$

$(y \leq \sqrt{1-x^2})$



$$I = \int_B (|x|+|y|)\, d(x,y)$$

$$= 4 \cdot \int_F (x+y)\, d(x,y)$$

$$F = \left\{(x,y) \,\middle|\, x \in [0,1],\ y \in \left[\tfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2},\ \sqrt{1-x^2}\right]\right\}$$

$$F = \left\{(x,y) \,\middle|\, y \in [0,1],\ x \in \left[\sqrt{1-4y^2},\ \sqrt{1-y^2}\right]\right\}$$

$$I = \int_B (|x|+|y|)\, d(x,y) = 4 \cdot \int_F (\underbrace{|x|+|y|}_{x \text{ und } y \geq 0})\, d(x,y)$$

$$= 4 \cdot \int_F (x+y)\, d(x,y) = 4 \cdot \int_0^1 \left(\int_{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)\, dy \right) dx$$

$$= 4 \cdot \int_0^1 \left[x \cdot y + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= 4 \cdot \int_0^1 \left[x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(1-x^2) - x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(1-x^2) \right] dx$$

$$= \underline{4 \cdot \frac{5}{12}}$$

$$I = \int_B (|x|+|y|)\, d(x,y) = 4 \int_F (x+y)\, d(x,y)$$

$$= 4 \cdot \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-4y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\, dx \right) dy$$

$$= 4 \cdot \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 + x \cdot y \right]_{x=\sqrt{1-4y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$= \underline{4 \cdot \frac{5}{12}}$$

Mehrdimensionale Integration

Aufgabe 5

(a) Skizziere die Menge

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + 4y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

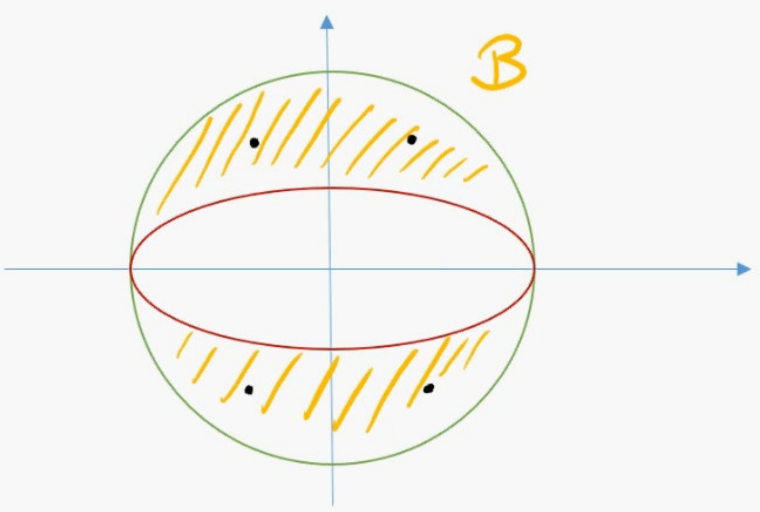
(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$\int_B xy \, d(x, y)$$

mit Hilfe von Symmetrieargumenten.

(a) Skizziere die Menge

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{1 \leq x^2 + 4y^2}_{\text{Ellipse}},\ \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{\text{Kreis}}\}.$$



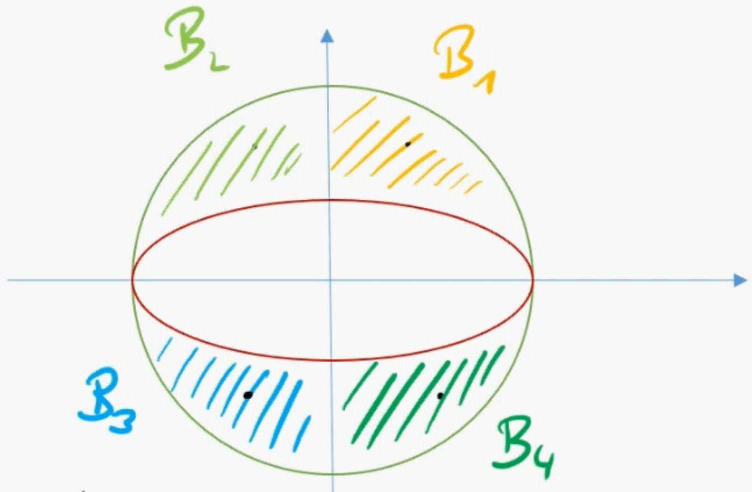
$f(x, y) = x \cdot y$

Funktion ist "symmetrisch" bis auf Vorzeichen.

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$I = \int_B xy \, d(x,y)$$

mit Hilfe von Symmetrieargumenten.



[Funktion f ist symmetrisch bezüglich dieser Zerlegung in B_1, B_2, B_3, B_4]

$$I = \int_{B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4} x \cdot y \, d(x,y) =$$

$$= \int_{B_1} \overset{>0}{x} \cdot \overset{>0}{y} \, d(x,y) + \int_{B_2} \underset{<0}{x} \cdot \overset{>0}{y} \, d(x,y) + \int_{B_3} \underset{<0}{x} \cdot \underset{<0}{y} \, d(x,y) + \int_{B_4} \overset{>0}{x} \cdot \underset{<0}{y} \, d(x,y)$$

$$= \int_{B_1} x \cdot y \, d(x,y) + \int_{B_1} (-x) \cdot y \, d(x,y) + \int_{B_1} (-x)(-y) \, d(x,y) + \int_{B_1} x \cdot (-y) \, d(x,y) =$$

$$= \int_{B_1} x \cdot y \, d(x,y) \cdot (1 - 1 + 1 - 1) = 0$$

Aufgabe 6 Transformationsformel

(a) Skizzieren Sie einen viertelkreisförmigen Tisch und berechnen Sie die Masse

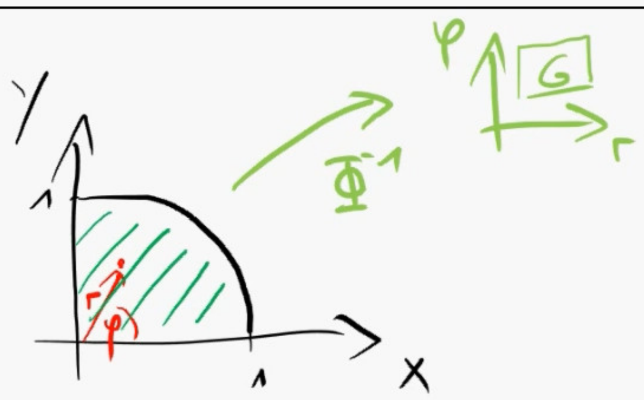
$$M = \int_{\text{Tisch}} 1 \, d(x,y) \, ,$$

indem Sie auf Polarkoordinaten transformieren.

(b) Berechne Sie nun ebenfalls den Schwerpunkt des Tisches, d. h.

$$s_x = \frac{1}{M} \int_{\text{Tisch}} x \, d(x,y) \, , \quad \text{und} \quad s_y = \frac{1}{M} \int_{\text{Tisch}} y \, d(x,y) \, .$$

(c) Wie groß ist das Trägheitsmoment des Tisches, wenn dieser um seine Ecke rotiert wird? (Das heißt, die Drehachse befindet sich im Kreismittelpunkt senkrecht zur Tischebene.)



$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{matrix} = x \\ = y \end{matrix}$$

$$\int_{\underset{= \text{Tisch}\,(\tilde{G})}{\Phi(G)}} \underbrace{f(x,y)}_{=1 \text{ (bei (a))}} \, d(x,y) = \int_G \underbrace{f(\Phi(r,\varphi))}_{=1 \text{ (bei (a))}} \cdot \underbrace{|\det J_\Phi(r,\varphi)|} \, d(r,\varphi)$$

$$J_\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} , \quad \det J_\Phi(r,\varphi) = r\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} = r$$

$$G = \underset{r}{[0,1]} \times \underset{\varphi}{[0, \tfrac{\pi}{2}]}$$

(a) Masse: $$M = \int_{T\text{isch}} 1 \, d(x,y) \overset{\substack{\text{Transf. auf Polarkoordinaten} \\ \downarrow}}{=} \int_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} 1 \cdot r \;\; d(r,\varphi)$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} r \;\; d\varphi \right) dr \;=\; \underline{\frac{\pi}{4}}$$

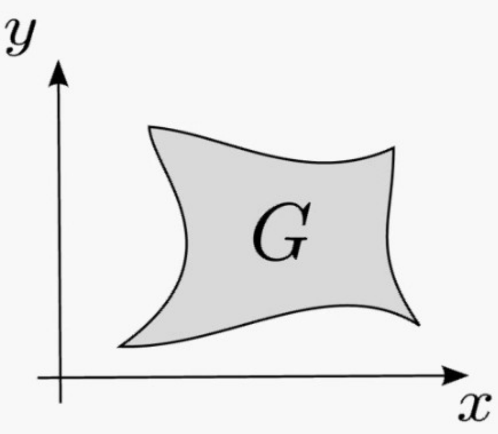
(b) Schwerpunkt: $$S_x = \frac{1}{M} \int_{T\text{isch}} x \;\; d(x,y) \overset{\substack{\text{Transf.} \\ \downarrow}}{=} \frac{1}{M} \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} r\cos\varphi \cdot r \;\; d\varphi \right) dr$$

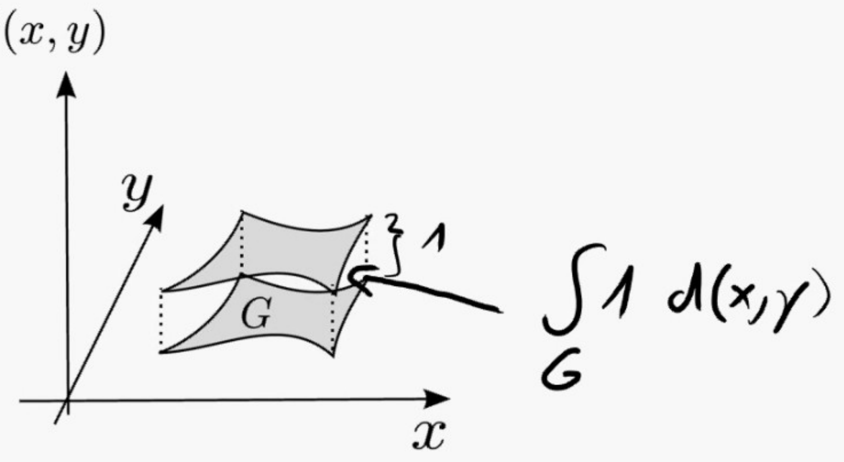
$$= \frac{4}{3\pi} \;=\; S_y \qquad \text{(aus Symmetriegründen)}$$

(c) Trägheitsmoment: $$\tau \,\dot{=}\, \int_{T\text{isch}} (x^2+y^2) \;\; d(x,y) \overset{\text{Transf.}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} r^2 \cdot r \;\; d\varphi \right) dr$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

Mehrdimensionale Integration um Flächen oder Volumina zu berechnen.





$$\text{Flächeninhalt}(G) = \int_G 1 \, d(x,y)$$

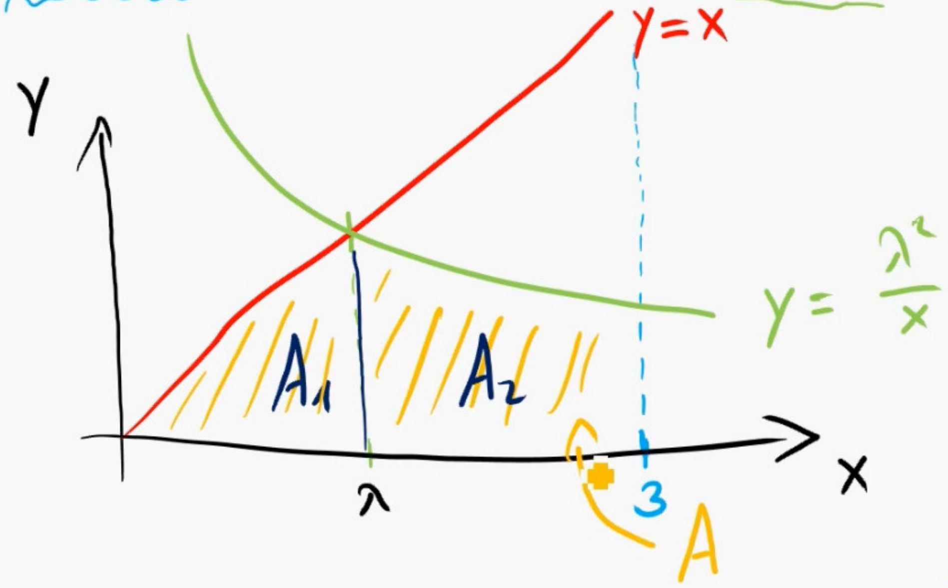
Hilfsmittel: - Transformationsformel (Kugelkoordinaten)
- Satz v. Fubini

Aufgabe 7 Flächenberechnung mit mehrdim. Integration

Skizzieren Sie die folgenden Fläche und berechnen Sie die Flächeninhalt mit Hilfe eines zweidimensionalen Integrals:

Die Fläche im 1. Quadraten $(x, y \geq 0)$ zwischen den Geraden $y = x$ und $x = 3 > 0$ und der Hyperbel $y = \lambda^2/x$ mit $0 < \lambda < 3$.

$y = \frac{1}{x}$



Gleichsetzen für den Schnittpunkt:

$$x = \frac{\lambda^2}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad x = \lambda$$

$$A = A_1 + A_2 = \int_{A_1} 1 \, d(x,y) + \int_{A_2} 1 \, d(x,y)$$

$$A = A_1 + A_2 = \int_{A_1} d(x,y) + \int_{A_2} d(x,y)$$

$$= \int_0^\lambda \left(\int_0^x 1 \, dy \right) dx + \int_\lambda^3 \left(\int_0^{\lambda^2/x} 1 \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^\lambda x \, dx + \int_\lambda^3 \frac{\lambda^2}{x} \, dx = \frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda^2 \Big[\ln|x| \Big]_\lambda^3$$

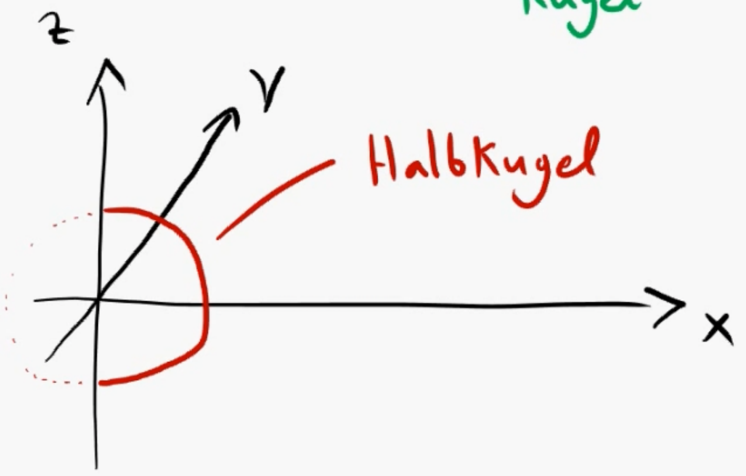
$$= \lambda^2 \left[\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{3}{\lambda}\right) \right]$$

Aufgabe 8 Volumenberechnung mit mehrdim. Integralen

Skizzieren Sie den folgenden Körper und berechnen Sie das Volumen mit Hilfe von dreidimensionalen Integralen

$$A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \underbrace{\overbrace{x^2+y^2+z^2}^{r^2} \le 1}_{\text{Kugel}}\,,\ \underbrace{\overset{r\sin\theta\sin\varphi}{y} \ge 0}_{\text{schneidet Kugel ab}}\}.$$

$$\mathrm{vol}(A) = \int_A 1 \, d(x,y,z)$$



A = Halbkugel , $\mathrm{vol}(A) = \int_A 1 \, d(x,y,z)$

Transformation in Kugelkoordinaten

$$\underset{(x,y,z)}{A} \xrightarrow{\Phi^{-1}} \underset{(r,\varphi,\theta)}{\boxed{B}}$$

$$\Phi(r,\varphi,\theta) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}, \qquad \Phi^{-1} = ?$$

Transformationsformel:

$$\int_{\Phi(B)=A} \underbrace{f(x,y,z)}_{1} \, d(x,y,z) = \int_{\underbrace{B}_{?}} \underbrace{f(\Phi(r,\varphi,\theta))}_{1} \underbrace{\left|\det J_{\Phi}(r,\varphi,\theta)\right|}_{?} \, d(r,\varphi,\theta)$$

$$B = \Phi^{-1}(A) = \{(r,\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^3 \mid \overbrace{r\in[0,\infty),\ \varphi\in[0,2\pi],\ \theta\in[0,\pi]}^{\text{immer bei Kugelkoordinaten}},\ r\le 1,\ r\sin\theta\sin\varphi \ge 0 \}$$

$$B = \{(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi],\ \theta \in [0,\pi],\ \underbrace{r}_{\geq 0}\,\underbrace{\sin\theta}_{\geq 0}\,\sin\varphi \geq 0\}$$

$\Rightarrow \varphi \in [0,\pi]$

$$= \{(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0,1],\ \varphi \in [0,\pi],\ \theta \in [0,\pi]\}$$

$$\det J_{\Phi}(r,\varphi,\theta) = r^2 \sin\theta$$ (merken, nachrechnen!)

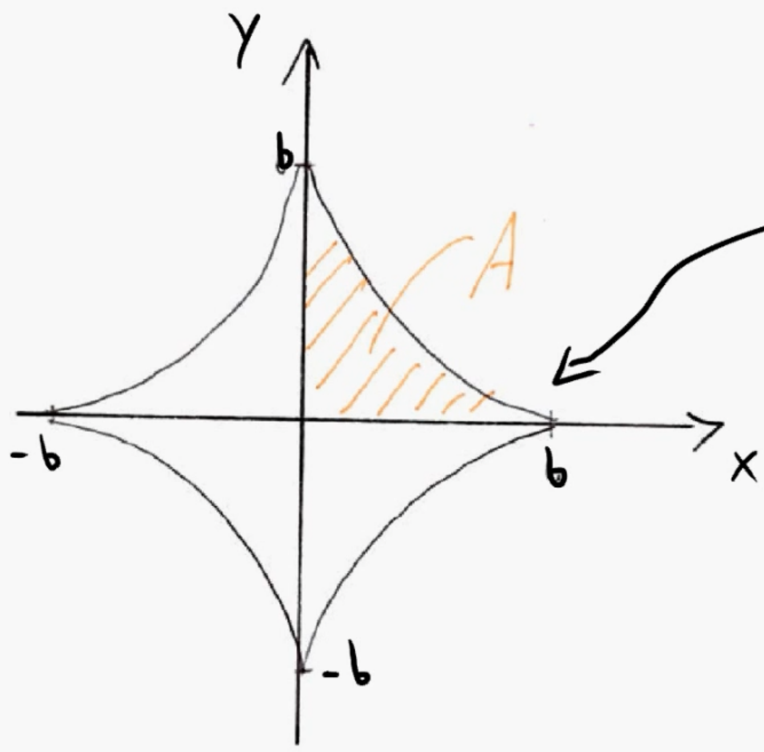
$$\mathrm{vol}(A) = \int_A 1 \, d(x,y,z) \overset{\text{Transf.}}{=} \int_B 1 \, |r^2 \sin\theta| \, d(r,\varphi,\theta)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^\pi r^2 \sin\theta \, d\theta \right) d\varphi \right) dr = \underline{\frac{4}{6}\pi}$$

Aufgabe 9

Skizzieren Sie die Astroide beschrieben durch $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = a > 0$. Berechnen Sie den eingeschlossenen Flächeninhalt mit Hilfe von neuen Koordinaten $x = \rho\cos^3(\theta)$ und $y = \rho\sin^3(\theta)$.

$a = b^{2/3}$, $\boxed{b := a^{3/2}}$

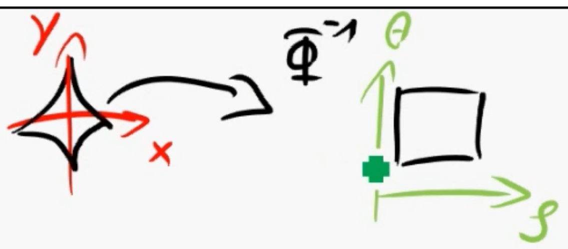


Stern Kurve hat Parametrisierung:

$$\theta \mapsto \begin{pmatrix} b\cos^3\theta \\ b\sin^3\theta \end{pmatrix}$$

$\underset{\sim\sim\sim}{\text{Gesucht:}}$ Fläche $= 4 \cdot A = 4 \cdot \int_A 1 \, d(x,y)$

Neue Koordinaten: $\Phi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos^3\theta \\ \rho\sin^3\theta \end{pmatrix} \begin{matrix} = x \\ = y \end{matrix}$



Transformationsformel: $\int_{A=\Phi(B)} 1 \, d(x,y) = \int_B 1 \cdot \underbrace{|\det J_\Phi(\rho,\theta)|}_{?} \, d(\rho,\theta)$

Jacobi-Determinante:

$$\det J_\Phi(\rho,\theta) = \det \begin{pmatrix} \cos^3\theta & 3\rho\cos^2\theta\,(-\sin\theta) \\ \sin^3\theta & 3\rho\sin^2\theta\cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \cos^4\theta\sin^2\theta\cdot 3\rho + \cos^2\theta\sin^4\theta\cdot 3\rho = 3\rho\cos^2\theta\sin^2\theta\,(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1})$$

$$= 3\rho(\underbrace{\cos\theta\sin\theta}_{\frac{1}{2}\sin(2\theta)})^2 = 3\rho\cdot\frac{1}{4}\sin^2(2\theta) = \frac{3}{4}\rho\cdot\frac{1}{2}(1-\cos(4\theta))$$

$\left[\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2 x\right]$

$$= \frac{3}{8}\rho\,(1-\cos(4\theta))$$

Was ist B?

$$\Phi^{-1}(A) = B = \left\{ (\rho, \theta) \mid \rho \in [0, b] \ , \ \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \right\}$$

$$\text{Fläche} = 4 \cdot A = 4 \cdot \int_{\Phi(B)} 1 \, d(x,y) = 4 \cdot \int_{B} 1 \cdot \rho \frac{3}{8} (1 - \cos(4\theta)) \, d(\rho, \theta)$$

$$= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^b \frac{3}{8} \rho \, (1 - \cos(4\theta)) \, d\rho \right) d\theta \Leftarrow \left(b^2 = a^3 \right)$$

$$= 4 \cdot \frac{3}{32} \pi a^3 = \underline{\frac{3}{8} \pi a^3}$$