Aufgabe 6 Transformationsformel

(a) Skizzieren Sie einen viertelkreisförmigen Tisch und berechnen Sie die Masse

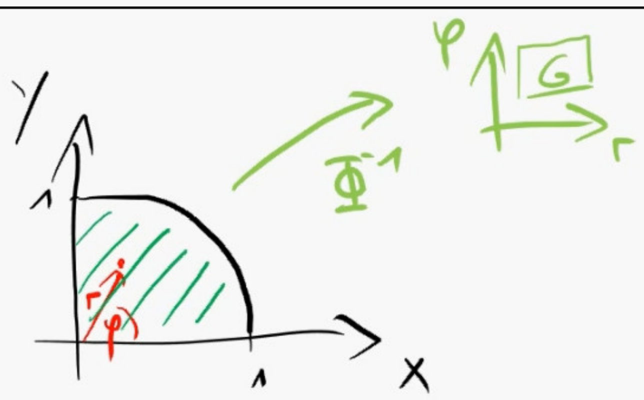
$$M = \int_{\text{Tisch}} 1\, d(x,y) ,$$

indem Sie auf Polarkoordinaten transformieren.

(b) Berechne Sie nun ebenfalls den Schwerpunkt des Tisches, d. h.

$$s_x = \frac{1}{M}\int_{\text{Tisch}} x\, d(x,y) , \quad \text{und} \quad s_y = \frac{1}{M}\int_{\text{Tisch}} y\, d(x,y) .$$

(c) Wie groß ist das Trägheitsmoment des Tisches, wenn dieser um seine Ecke rotiert wird? (Das heißt, die Drehachse befindet sich im Kreismittelpunkt senkrecht zur Tischebene.)



$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{matrix} = x \\ = y \end{matrix}$$

$$\int_{\Phi(G)} \underbrace{f(x,y)}_{=1 \text{ (bei (a))}} d(x,y) = \int_G \underbrace{f(\Phi(r,\varphi))}_{=1 \text{ (bei (a))}} \cdot \underbrace{|\det J_\Phi(r,\varphi)|}\, d(r,\varphi)$$

$\Phi(G)$ "= Tisch ($\tilde{G}$)"

$$J_\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \det J_\Phi(r,\varphi) = r\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} = r$$

$$G = \underbrace{[0,1]}_{r} \times \underbrace{[0,\tfrac{\pi}{2}]}_{\varphi}$$

(a) <u>Masse:</u> $M = \int\limits_{\text{Tisch}} 1 \, d(x,y) \overset{\substack{\text{Transf. auf Polarkoordinaten} \\ \downarrow}}{=} \int\limits_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} 1 \cdot r \; d(r,\varphi)$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} r \; d\varphi \right) dr = \underline{\frac{\pi}{4}}$$

(b) <u>Schwerpunkt:</u> $S_x = \frac{1}{M} \int\limits_{\text{Tisch}} x \; d(x,y) \overset{\substack{\text{Transf.} \\ \downarrow}}{=} \frac{1}{M} \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} r\cos\varphi \cdot r \; d\varphi \right) dr$

$$= \frac{4}{3\pi} = S_y \qquad \text{(aus Symmetriegründen)}$$

(c) <u>Trägheitsmoment:</u> $\tau = \int\limits_{\text{Tisch}} (x^2+y^2) \; d(x,y) \overset{\text{Transf.}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} r^2 \cdot r \; d\varphi \right) dr$

$$= \frac{\pi}{8}$$