

## mehrdimensionale Integration

### Aufgabe 5 +

(a) Skizziere die Menge

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + 4y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

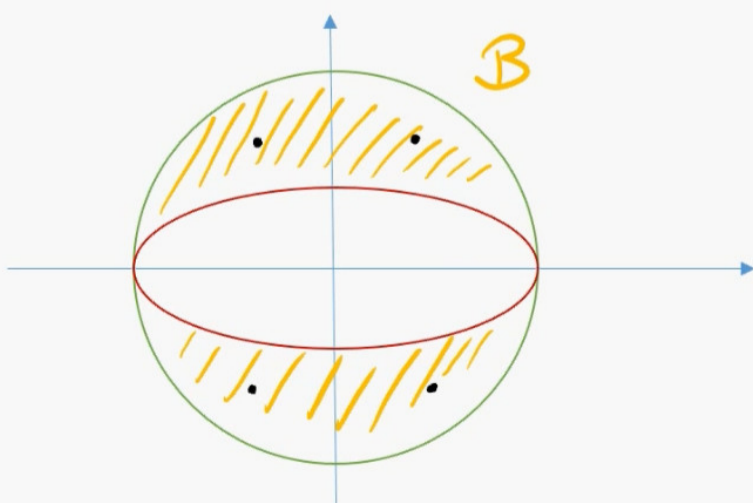
(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$\int_B xy \, d(x, y)$$

mit Hilfe von Symmetrieargumenten.

(a) Skizziere die Menge

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{1 \leq x^2 + 4y^2}_{\text{Ellipse}}, \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{\text{Kreis}}\}.$$



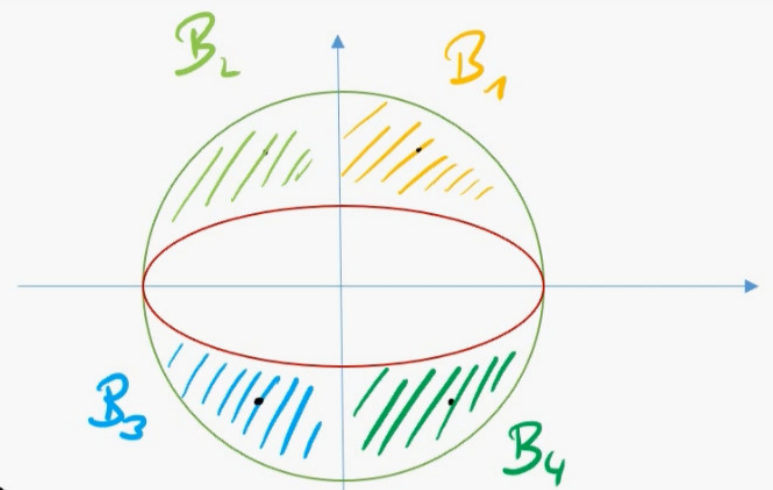
$$f(x, y) = x \cdot y$$

Funktion ist "symmetrisch"  
bis auf Vorzeichen.

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$I = \int_B xy \, d(x, y)$$

mit Hilfe von Symmetrieargumenten.



[ Funktion  $f$  ist symmetrisch bezüglich dieser Zerlegung in  $B_1, B_2, B_3, B_4$  ]

$$I = \int_{B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4} x \cdot y \, d(x, y) =$$

$$= \int_{B_1}^{x \geq 0, y \geq 0} x \cdot y \, d(x, y) + \int_{B_2}^{x \leq 0, y \geq 0} x \cdot y \, d(x, y) + \int_{B_3}^{x \leq 0, y \leq 0} x \cdot y \, d(x, y) + \int_{B_4}^{x \geq 0, y \leq 0} x \cdot y \, d(x, y)$$

$$= \int_{B_1} x \cdot y \, d(x, y) + \int_{B_1} (-x) \cdot y \, d(x, y) + \int_{B_1} (-x) \cdot (-y) \, d(x, y) + \int_{B_1} x \cdot (-y) \, d(x, y) =$$

$$= \int_{B_1} x \cdot y \, d(x, y) \cdot (1 - 1 + 1 - 1) = 0$$