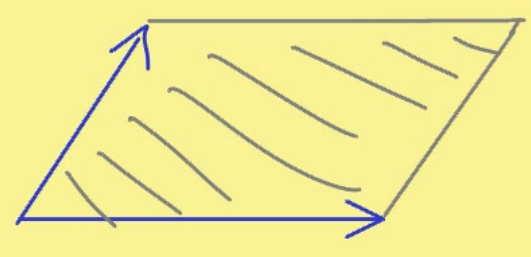
The Bright Side of Mathematics

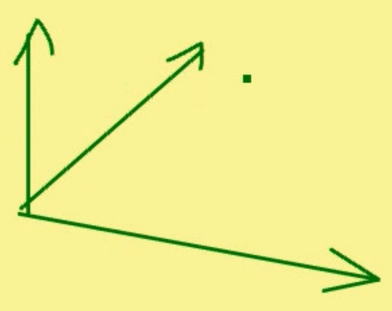
Determinanten

Teil 2: Determinante als Volumenmaß

Fläche in $\mathbb{R}^2$:

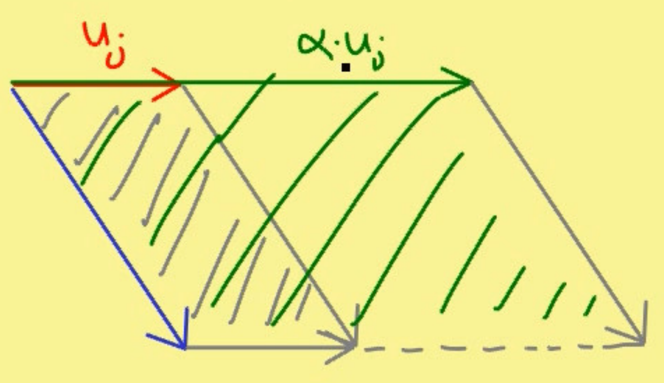


n-Volumen in $\mathbb{R}^n$



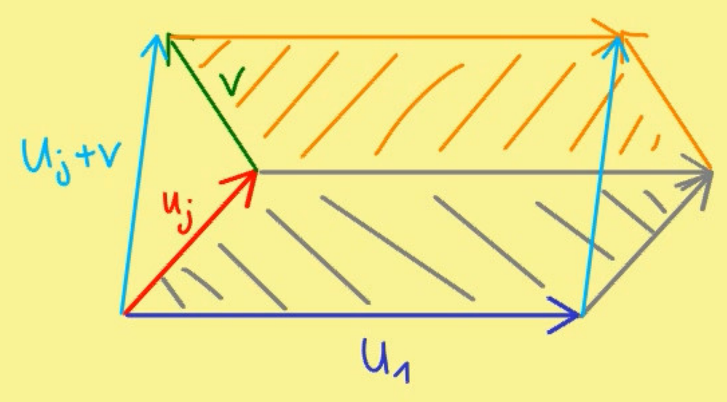
$\mathrm{Vol}_n : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{R}$ muss folgende Rechenregeln erfüllen:

(a) $\mathrm{Vol}_n(u_1, u_2, \ldots, \alpha u_j, \ldots, u_n) = \alpha \cdot \mathrm{Vol}_n(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_n)$



für alle $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$
für alle $\alpha \in \mathbb{R}$
für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$

(b) $\mathrm{Vol}_n(u_1, \ldots, u_j + v, u_{j+1}, \ldots, u_n) = \mathrm{Vol}_n(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_n)$
$+ \mathrm{Vol}_n(u_1, \ldots, v, u_{j+1}, \ldots, u_n)$



für alle $u_1, \ldots, u_n, v \in \mathbb{R}^n$
für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$

(c) $\mathrm{Vol}_n(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = -\mathrm{Vol}_n(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$

für alle $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$
für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$.

(d) $\mathrm{Vol}_n(e_1, \ldots, e_n) = +1$ $\qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ergebnis: In $\mathbb{R}^2$: Vol_2 mit Eigenschaften (a)–(d):

$$\mathrm{Vol}_2\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vol}_2\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right)$$
$$\overset{(b)}{=} \mathrm{Vol}_2\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) + \mathrm{Vol}_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right)$$
$$\overset{(a)}{=} u_1 \cdot \mathrm{Vol}_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) + u_2 \cdot \mathrm{Vol}_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right)$$

Ergebnis: In $\mathbb{R}^2$: Vol_2 mit Eigenschaften (a)–(d):

$$\mathrm{Vol}_2\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vol}_2\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right)$$
$$\overset{(b)}{=} \mathrm{Vol}_2\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) + \mathrm{Vol}_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right)$$
$$\overset{(a)}{=} u_1 \cdot \mathrm{Vol}_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) + u_2 \cdot \mathrm{Vol}_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{(a),(b)}{=} u_1 \cdot v_1 \cdot \overbrace{\mathrm{Vol}_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}^{\overset{(c)}{=} 0} + u_1 v_2 \underbrace{\mathrm{Vol}_2\left(\overset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\right)}_{\overset{(d)}{=} 1}$$
$$+ u_2 v_1 \underbrace{\mathrm{Vol}_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{\overset{(c),(d)}{=} -1} + u_2 v_2 \cdot \underbrace{\mathrm{Vol}_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{\overset{(c)}{=} 0}$$

$$= u_1 v_2 - u_2 v_1 = \det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

Im $\mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{Vol}_n\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \overbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}}^{(*)}\right) = \mathrm{Vol}_n\left(a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \cdots + a_{n1} e_n, (*)\right)$$

$$\overset{(a),(b)}{=} a_{11} \cdot \mathrm{Vol}_n(e_1, (*)) + a_{21} \mathrm{Vol}_n(e_2, (*)) + \cdots + a_{n1} \mathrm{Vol}_n(e_n, (*))$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} a_{j_1,1} \cdot \mathrm{Vol}_n(e_{j_1}, (*))$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} a_{j_1,1}\, a_{j_2,2} \cdots a_{j_n,n} \mathrm{Vol}_n(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n})$$

$$= \sum_{(j_1,\ldots,j_n) \in \{1,\ldots,n\} \times \cdots \times \{1,\ldots,n\}} a_{j_1,1} \cdot a_{j_2,2} \cdots a_{j_n,n} \underbrace{\mathrm{Vol}_n(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n})}_{=0}$$

, wenn zwei Indices übereinstimmen

$$= \sum_{(j_1,\ldots,j_n) \in S_n} a_{j_1,1} \cdot a_{j_2,2} \cdots a_{j_n,n} \underbrace{\mathrm{Vol}_n(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n})}_{\in \left\{\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right\} = \operatorname{sgn}((j_1,\ldots,j_n))}$$

$$= \sum_{(j_1,\ldots,j_n) \in S_n} a_{j_1,1}\, a_{j_2,2} \cdots a_{j_n,n} \cdot \operatorname{sgn}((j_1,\ldots,j_n)) =: \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(Leibniz-Formel)